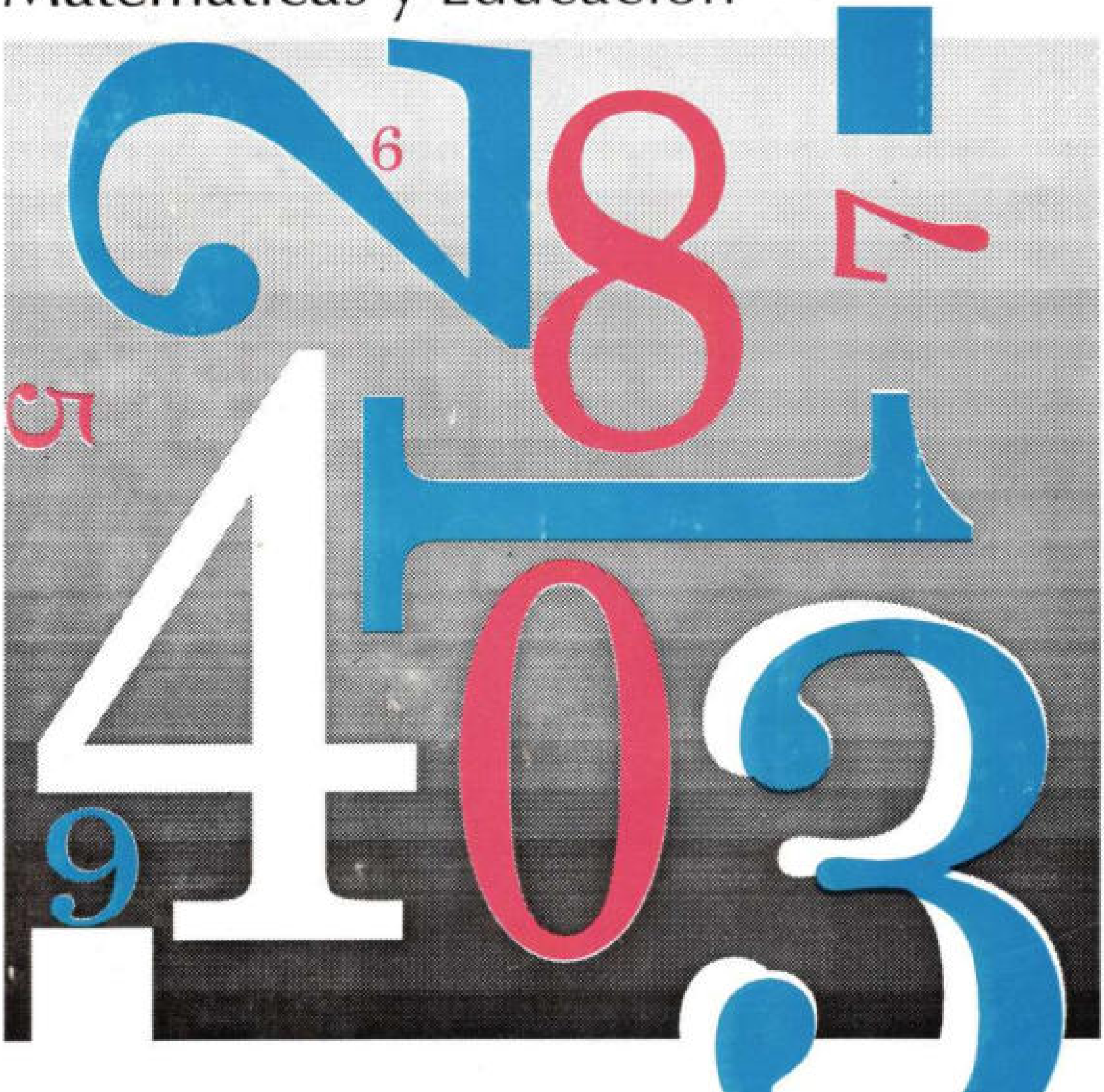
REVISTA UNIBE DE CIENCIA Y CULTURA

VOL. 2, NO. 1 ENERO-ABRIL 1990

Matemáticas y Educación



ESTRUCTURA DE UNIBE

Abraham J. Hazoury
Rector

Lic. María Filomena González
Vicerrectora Académica

Arq. Enmanuel Grullón
Vicerrector de Desarrollo

Dr. Ezequiel Acosta
Vicerrector Administrativo

REVISTA *UNIBE* DE CIENCIA Y CULTURA

VOL. 2, NO. 1, ENERO-ABRIL, 1990

Esta es una publicación cuatrimestral
de la Universidad Iberoamericana
que aparece en abril, agosto y
diciembre de cada año.
Las opiniones aquí expresadas
son responsabilidad exclusiva de los
autores y no necesariamente reflejan los puntos
de vista de UNIBE.

Inscrito en la Secretaría de Estado de Interior y Policía, con el número 5970 del 22 de mayo de 1989.

Oficina Editorial y suscripciones:

Revista UNIBE de Ciencia y Cultura
Av. Francia 129
Santo Domingo.
República Dominicana.
Teléfono (809) 689-4111
Fax: (809) 686-5821

Suscripción:

	Rep. Dom.	*Exterior*
Anual:	RD$90.00	US$20.00
Núm. suelto:	RD$35.00	US$8.00

Contenido

Presentación

En este número se recogen trabajos del área de la matemática, incluyendo sobre la enseñanza de la misma, así como algunos de los presentados en la "1era. Jornada Científica del Quehacer Matemático en la República Dominicana", con el cual la Universidad Iberoamericana reinicia la publicación de su Revista UNIBE de ciencia y cultura.

Con este reinicio esperamos fortalecer aún más la tradición institucional de la Universidad en cuanto a la promoción e impulso de la ciencia y la cultura, y con ello el vínculo entre universidad y sociedad.

Quehacer matemático en la República Dominicana

Miguel Sang Ben *

Tratar en una universidad del tercer mundo el tema de la enseñanza de la matemática es una empresa que conlleva varias temeridades. En primer lugar, es ir contra la creencia generalizada que considera el conocimiento matemático como prescindible o, a lo sumo, innecesario, para el desarrollo profesional.

Esta temeridad debe ser sustentada por la capacidad de poder demostrar que la valía profesional reside en alcanzar los niveles de abstracción que sólo el razonamiento matemático permite. Nuestro amor al conocimiento y a nuestro país debe capacitarnos para emprender esta cruzada y hacer conciencia sobre el rol de las matemáticas en la competencia profesional de cada estudiante universitario dominicano.

Una segunda temeridad es tratar con una opinión pública sin una traza de conciencia del valor social del quehacer matemático, porque tenemos una cultura que considera a éste como fruto del ocio o de la genialidad, despreciándolo por ignorancia. Si no se crea un ambiente social consciente del carácter crítico de la educación matemática para alcanzar la revolución tecnológica que está ocurriendo muy a pesar de nosotros mismos y de nuestra indiferencia, seguiremos siendo dependientes y subdesarrollados.

La tercera temeridad es crear una tradición en un país sin tradiciones. Esta Primera Jornada Científica del Quehacer Matemático en la República Dominicana pretende ser una institución, permanente y definitiva, donde se congreguen, en un espíritu de diálogo para compartir experiencias, todos los profesionales preocupados por salvar los peligros que amenazan profundizar el subdesarrollo y el atraso de nuestra economía: la indiferencia de los profesionales hacia las matemáticas y la incompresión de este quehacer por parte de la sociedad.

Con la esperanza de que haremos camino al andar, en nombre de la Universidad Iberoamericana, patrocinadora de esta Primera Jornada Científica del Quehacer Matemático en la República Dominicana y de las próximas por venir, les extiendo la más calurosa bienvenida a este cónclave de "trabajadores del espíritu" en el campo de las matemáticas.

Agradezco la confianza que depositan en la Universidad Iberoamericana al honrarnos con su presencia y disponer sus talentos para presentarnos los frutos de los esfuerzos investigativos sobre un tema de profundas raíces en el avance científico y profesional, como son las matemáticas.

Con el esfuerzo de todos, lograremos avances en el desarrollo y la aplicación de las matemáticas.

* Decano de estudios avanzados de la Universidad Iberoamericana.

Algunos elementos de la teoría pitagórica

Ricardo González Felipe *
Fidel Castro González *

En la historia del desarrollo de las ideas matemáticas de la Grecia Antigua, Pitágoras, sin lugar a dudas, ocupa un lugar cimero. Sin embargo, del propio Pitágoras no ha quedado obra alguna escrita, siendo difícil discernir qué verdades son descubrimientos suyos y cuáles de sus discípulos. Por eso, se puede hablar no de Pitágoras, sino del pitagorismo como corriente filosófica. La escuela pitagórica existente en Crotona (Italia meridional) y fundada hacia el año 530 a.n.e., tenía cierto carácter de sociedad secreta y sus discípulos veían en los números el fundamento único y la esencia de todas las cosas.

La Matemática y la mística en el pitagorismo se unían de manera sorprendente, emergiendo de esta unión el conocimiento matemático preciso de los pitagóricos posteriores, que valoraban sólo aquello que pudiera ser demostrado mediante deducciones. Los pitagóricos buscaban en la naturaleza y la sociedad todo lo que era invariante y la búsqueda de leyes eternas del Universo los llevó al estudio de la geometría, la aritmética, la astronomía y la música.

La aritmética de los pitagóricos era en gran medida una ciencia especulativa. Los números se dividían en clases: pares e impares, primos y compuestos, perfectos, asociados, triangulares, cuadrados, pentagonales, etcétera.

Las propiedades de algunos de los números se estudiaban con ayuda de construcciones geométricas. Así tenemos, por ejemplo, los llamados números triangulares:

1 3 6 , etc;

los cuadrados:

1 4 9 etc;

y los pentagonales

1 5 12 , etc.

correspondientes a las sumas de las progresiones aritméticas:

$$1 + 2 + 3 + ... = n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

$$1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

respectivamente.

* Matemáticos cubanos.

Al mismo tiempo los pitagóricos le daban a los números un carácter místico, viendo en éstos el secreto que explicaba los enigmas del mundo. Por ejemplo, el número 1 lo identificaban con la razón porque era invariante, el 2 con la opinión por ser éste ilimitado e indeterminado, el 4 con la justicia porque es el cuadrado perfecto, o sea, el producto de dos números iguales; el número 5 - la suma del primer número "femenino" (2) y el primer número "masculino" (3) - constituía el símbolo del matrimonio. El número 10 ellos lo consideraban maravilloso puesto que era la suma de los cuatro primeros números (10 = 1+2+3+4).

Asimismo, los pitagóricos consideraban de un modo peculiar los números que eran iguales a la suma de sus divisores propios (menores que el número dado), o sea, los llamados números perfectos.

En 1917 durante unas búsquedas subterráneas en Roma, fue descubierta una extraña construcción: una sala redonda y a su alrededor 28 habitaciones. Ésta resultó ser la Academia de Ciencias de los neopitagóricos. Pero, ¿por qué en ella habían 28 habitaciones?

Resulta que el número 28 es un número perfecto (28=1+2+4+7+14). De ahí que los antiguos griegos lo consideraran un número divino. Además del 28, los griegos conocían otro número perfecto: el (6= 1+2+3), siendo éste el más perfecto de todos, por ser precisamente el primero entre éstos. Aunque parezca sorprendente los números 6 y 28 aparecen frecuentemente, incluso en casos inesperados. Tomemos por ejemplo un cuadrado y tracemos sus diagonales. En total tendremos 6 segmentos. Consideremos ahora un cubo y tracemos todas las diagonales posibles. Tendremos: 12 aristas, 12 diagonales en las caras y 4 diagonales del cubo, es decir, en total hay 28 segmentos. Pongamos otro ejemplo. Tomemos 8 puntos en el espacio, tales que tres cualesquiera de éstos no estén situados sobre una misma recta. Si unimos estos puntos entre sí, trazando todos los segmentos posibles, no es difícil calcular que el número total de segmentos obtenidos es igual a 28 (en particular, los 8 puntos dados pueden ser los vértices de un cubo y entonces tenemos el ejemplo anterior).

Antes de Euclides se conocían sólo estos dos números perfectos. El gran matemático en su obra maestra "Elementos" demostró que todo número par de la forma $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, donde 2^p-1 es un número primo* es necesariamente un número perfecto (ver problema 1 del apéndice1). Con ayuda de esta fórmula Euclides encontró otros dos números perfectos:

$$496 = 2^4(2^5-1) \text{ y } 8128 = 2^6(2^7-1)$$

Aunque Euclides conocía la ley de formación de números pares perfectos, no pudo hallar otros números dada la dificultad de encontrar los números primos de la forma 2^p-1.

Casi durante 1500 años se conocieron sólo estos 4 números perfectos y sólo en el siglo XV fue hallado el quinto número perfecto: 33 550 336, correspondiente a p= 13 en la fórmula de Euclides. Más tarde en los trabajos del matemático italiano del siglo XVII Cataldi fueron escritos los dos números perfectos siguiente, correspondientes a p= 17 y p = 19 : 8 589 869 056 y 137 438 691 y 328. Sin embargo, aún es un enigma cómo fueron hallados estos números, ya que para esto era necesario demostrar que $2^{17}-1$ y $2^{19}-1$ son números primos. Por primera vez esto fue demostrado por Leonardo Euler, quien encontró un nuevo teorema sobre los números perfectos. Euler demostró que todos los números pares perfectos tienen necesariamente la forma indicada por Euclides.

* Los números de la forma 2^p-1 se conocen con el nombre de números de Mersenne.

No obstante, aún quedan por responder algunas preguntas como, por ejemplo, qué forma deben tener los números impares perfectos y si existen éstos en general.

Actualmente con ayuda de las máquinas computadoras se han hallado otros números perfectos y al parecer, el mayor número perfecto que se conoce es el número 2^{132048} $(2^{132049}\text{-}1)$ (The American Mathematical Monthly, v. 91, No. 6, 1984, p. 339).

Para los pitagóricos también eran notables los llamados pares de números asociados, (o "números amigos") cada uno de los cuales es igual a la suma de los divisores propios del otro. Por ejemplo, los números $220 = 1+2+4+71+142$ y $284= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$ forman un par de números asociados o amigos. Cuentan que una vez cuando le preguntaron a Pitágoras que representaba para él un amigo, éste respondió que era "el segundo yo"; esto es "lo mismo que 220 y 284".

Los demás pares de números asociados es conveniente introducirlos con ayuda de las máquinas computadores. Para cada número n se hallan todos sus divisores (menores que n) y su suma m. Posteriormente, la misma operación se realiza con el número m. Si se obtiene nuevamente el número inicial n, entonces resulta que el par (n,m) es de números asociados.

Entre los pares de números "amigos" tenemos además de 220 y 284, los siguientes:
$1184 = 2^5 . 3\,7$ y $1210 = 2.5.11^2$;
$2620 = 2^2 . 5 . 131$ y $2924 = 2^2 . 17 . 43$;
$5020 = 2^2 . 5 . 251$ y $5564 = 2^2 . 13 . 107$;
$6232 = 2^3 . 19 . 41$ y $6368 = 2^5 . 199$;
$10\,744 = 2^3 . 17 . 79$ y $10\,586 = 2^3 . 23 . 59$. El par $17\,296 = 2^4 . 23 . 47$ y $18\,416 = 2^4.1151$ fue descubierto por Fermat, el par
$9\,363\,584 = 2^7 . 191 . 383$ y
$9\,437\,056 = 2^7 . 73 . 727$ fue hallado por Descartes. Euler encontró 59 pares de números asociados. Una amplia lista de 390 pares de números asociados hallados en los últimos 25 siglos fue presentada por E.B. Escott (Scripta Math., 12, 1946, p. 61-72). Un número considerable de nuevos pares han sido hallados por Poulet (Scripta Math., 14, 1948, p. 77). También se conocen pares de números impares asociados, por ejemplo, el par $12\,285 = 3^3 . 5 . 7 . 13$ y $14\,595 = 3 . 5 . 7 . 139$.

Sin embargo, aún no ha sido hallada una fórmula general que nos permita obtener dichos pares. Además se conoce muy poco de las propiedades de estos pares y se pueden hacer sólo algunas suposiciones. Por ejemplo, parece ser que ambos números deben tener la misma paridad.

Por último nos referiremos brevemente al problema de los números irracionales. Durante mucho tiempo se pensó que los números racionales (es decir, los números enteros y las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros) eran suficientes para medir cualquier magnitud. Partiendo del problema de Pitágoras referente al triángulo rectángulo se descubre una serie de triángulos rectángulos con lados cuyas longitudes están expresadas por medio de números enteros: $m.n$, $(m^2\text{-}n^2)/2$, $(m^2+n^2)/2$ (ver problema 2), donde m y n son números impares arbitrarios, primos relativos entre sí. La esperanza de poder racionalizar de este modo cualquier triángulo rectángulo resulta imposible. Por ejemplo, aunque se pueda calcular con una aproximación cada vez mayor la diagonal de un cuadrado de lado unitario, es decir la magnitud 2, mediante las fracciones 1/1, 3/2, 7/5, 17/12,... que convergen cada vez más por arriba y por abajo hacia el valor $\sqrt{2}$ (los números generadores de estas fracciones se pueden obtener de la identidad $2x^2\text{-}y^2 = (2x+y)^2 - 2(x+y)^2 = ...$), se obtendrán, sin embargo, números cada vez más cercanos a $\sqrt{2}$ sin alcanzar jamás el valor exacto. Esto quiere decir, que además de los números racionales existen otros números que no se pueden expresar como la razón de dos números enteros. Estos números se denominaron números irracionales. La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se puede demostrar geométricamente o algebraicamente, partiendo de las definiciones de números pares o impares (para esta última demostración ver problema 3).

El descubrimiento de los números irracionales representaba una contradicción con la **arithmetica universalis** de los pitagóricos, la cual tomaba como base las teorías de las relaciones racionales. De ahí que éstos decidieran mantener en secreto su descubrimiento. Al parecer, sólo después de la muerte de Pitágoras, uno de sus discípulos, Hipaso, dio a conocer la inconmesurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado. Según cuenta la leyenda, la muerte de Hipaso (murió ahogado en el mar) se explicaba por el hecho de haber tratado de revelar este secreto y por eso fue condenado a desaparecer eternamente. Es posible que esta leyenda se basara en el hecho histórico de la división del pitagorismo en dos corrientes: una científica y otra religioso-mística. Los representantes de la primera pretendían el intercambio de los conocimientos y los descubrimientos, y no permitían mantener éstos en secreto; mientras que los segundos, en correspondencia con sus rituales , exigían el secreto y el aislamiento de los científicos entre sí. Es muy probable que Hipaso se inclinara por los matemáticos (como también se le llamaba a los representantes de la primera corriente) y por eso fue expulsado de la escuela pitagórica.

A pesar de atribuirles un carácter místico a los números, los méritos científicos de los pitagóricos son grandiosos y al mismo tiempo, el estudio de las propiedades de los números en la escuela pitagórica dio inicio a una nueva ciencia: la teoría de los números.

Apéndice

1. Sea $n = 2^{p-1}(2^p-1)$, donde 2^p-1 es un número primo. Demostrar que la suma de los divisores de n (diferentes del propio n) es igual a n.

Escribiremos todos los divisores del número $n = 2^{p-1}.m$ (donde $m = 2p-1$ es un número primo) menores que n:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 2^2\ ,\ \dots\ ,\ 2^{p-2}\ ,\ 2^{p-1},$$
$$m\ ,\ 2m\ ,\ 2^2 m\ ,\ \dots\ ,\ 2^{p-2}m$$

Los números que se encuentran tanto en la primera fila como en la segunda, forman una progresión geométrica. Calculando la suma de estas progresiones encontramos que $2^{p-1} = m$ y $m(2^{p-1}-1) = n-m$. Sumando estos dos resultados concluimos que la suma de los divisores de n (diferentes de n) es igual a n.

2. Hallar todos los tríos de números enteros positivos (x, y, z) que sean solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Es claro que si el trío (x, y, z) satisface la ecuación dada, el trío (d.x,d.y,d.z) también es solución de dicha ecuación. Por lo tanto, supondremos que los números dados son primos relativos entre sí.

Demostraremos primeramente que en cada uno de tales tríos uno de los números, x ó y, debe ser par y el otro, impar. En efecto, si ambos números son pares, entonces z^2 es par y, por consiguiente, z es un número par. Pero esto contradice la suposición de que x, y, z son primos relativos. Si ambos números son impares, entonces z es par; pero esto tampoco es posible pues si $x = 2p+1$, $y = 2q+1$, tenemos $z^2 = 4(p^2+q^2+p+q) + 2$, es decir z^2 es un número que deja resto 2 al ser dividido por 4. Por otra parte si $z = 2k$, entonces $z^2 = 4k^2$ es divisible por 4 y obtenemos una contradicción.

Luego entonces sólo es posible una variante: uno de los números, por ejemplo x, es impar y el otro, y, es par. En este caso $x^2 + y^2$ es impar y por lo tanto, z es un número impar.

De la ecuación dada obtenemos : $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$. Es fácil demostrar que los factores (z+y) y (z-y) son primos entre sí (proponemos esto al lector). Pero si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado perfecto, entonces cada uno de éstos es un cuadrado perfecto, o sea que $z+y = m^2$, $z-y = n^2$. Resolviendo este sistema obtenemos $z = (m^2 + n^2)/2$, $y = (m^2 - n^2)/2$ y por último $x=m.n$, donde m y n son números impares, primos relativos entre sí.

3. Demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional Supongamos que existe un número racional p/q (donde p y q son números enteros primos relativos entre sí, $q= 0$), tal que $p/q=\sqrt{2}$. Entonces $p^2 = 2q^2$. De aquí concluimos que p es un número par, es decir $p = 2k$. Sustituyendo en la igualdad anterior tendremos que $4k^2 = 2q^2$, de donde $q^2=2k^2$. Por consiguiente, q también es un número par. Pero esto contradice el hecho de que p y q son primos entre sí. Por lo tanto la suposición de que $\sqrt{2}$ se puede representar en la forma de una fracción racional no es cierta.

Factores que inhiben y factores que facilitan el aprendizaje matemático en el nivel superior

Fidel Oteiza M. *

Nadja Antonijevic H. **

Un programa de investigación y de desarrollo en el área de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en el nivel superior.

Sobre la base de una revisión de la literatura reciente acerca del desarrollo de la pedagogía universitaria en latinoamérica y de la relacionada con las capacidades o habilidades de aprendizaje, se analizan los factores que dificultan y los que facilitan la formación en matemática en la educación superior.

Este estudio fue preparado con los auspicios de la Oficina Regional de Educación de la Unesco (OREALC), y en el marco de las actividades del proyecto FONDECYT NO. 1064-88), con el objeto de construir uno de los documentos base para las Quintas Jornadas Nacionales de Educación Matemática.

Su propósito fue estimular la reflexión y el trabajo a realizarse en las comisiones, que en esas jornadas, analizarán y harán proposiciones acerca de la docencia y del aprendizaje de la matemática en la educación superior.

• Parece una paradoja pero la educación superior actúa como si no creyese en la educación. No cree en la educabilidad de sus alumnos, ni en la propia capacidad educadora, un sistema que descansa más en la selección de talentos que en la formación de los mismos. Tampoco demuestra confianza en la educación la universidad que no incorpora, en sus aulas, los aprendizajes logrados por la educación como disciplina.

Salvo en contadas situaciones de excepción, que no se dan entre las carreras que tienen una componente matemática importante, los programas de estudio de las carreras universitarias, representan para el estudiante serias barreras que debe vencer sin que el sistema de educación superior le provee de las herramientas necesarias para superarlas. Los títulos o grados resultan ser así privativos de quienes tienen las capacidades para lograrlos, independientemente de lo que la institución de educación superior pueda ofrecerles en cuanto a formación. La universidad le presenta los contenidos y le evalúa, el resto lo debe hacer el estudiante.

Si la universidad creyese en la educabilidad, si creyese en la educación, si aceptase que tiene el mandamiento de coadyuvar en el desarrollo del talento, difícilmente se aceptarían los altos niveles de fracaso que en los primeros semestres, se supone, permite la selección de los más aptos. En todo caso permanece la duda: ¿son efectivamente los más aptos los que permanecen?, ¿es - por ejemplo - el éxito o el fracaso en matemática el

* Profesor del Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación de la Universidad de Santiago de Chile.

** Profesora de la Escuela de Psicología de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

mejor predictor de la calidad de un ingeniero, o de un economista?

Incluso en relación con los seleccionados, con los que vencen las barreras, cabe la pregunta: ¿basta con que la universidad seleccione a los más capaces o tiene una responsabilidad en relación con el crecimiento personal de cada uno de sus miembros? En el discurso oficial la respuesta a esta pregunta es afirmativa, la actuación del sistema mismo demuestra que no lo es.

Los programas de desarrollo cognitivo, destinados al crecimiento y al perfeccionamiento del sistema formado por las estrategias de aprendizaje en el aprendiz, tienen ya más de veinte años de desarrollo. La modificabilidad de las facultades que llamamos inteligentes, ha sido investigada y puesta a prueba. Existen programas de estimulación cognitiva cuyos efectos han sido evaluados y cuyos resultados han sido publicados.

¿Cómo se comparan esos programas con la práctica docente en la educación superior? Tanto y cuanto se comparan un tratamiento cuidadoso, adecuado a cada situación, seguido paso a paso por personal especialmente entrenado, con instrumentos técnicamente desarrollados y puestos a prueba y una clase en la que un profesor "dicta su materia" sin una preparación especial en la delicada materia de formar el intelecto.

Las dificultades para modificar esta situación son serias. "El fenómeno más importante que se ha producido en el sitema educativo de América Latina es la violenta expansión generada en los últimos treinta años" (González, 1984, p.30); expansión que el mismo autor dimensiona con las siguientes cifras: entre 1950 y 1970 la matrícula creció de poco más de seis millones de estudiantes (6.317.000) a veintiseis millones (26.055.000) y el número de docentes pasó de 111.000 en 1965 a 608.000 en 1980. En 1930 había en el continente 82 instituciones de educación superior (pp.40-42). Sin embargo, si comparamos la actividad en el aula, la práctica de la acción docente, digamos la vigente hace treinta años y la actual, pocos son los cambios de los que tendríamos que dar cuenta.

Se puede concluir que se están aplicando a una educación superior generalizada - por no decir masificada - las prácticas de una enseñanza para élites.

Una educación para pocos seleccionados se puede basar, tal como se lo hace actualmente en los postgrados, en un grupo también altamente seleccionado de docentes que exponen, señalan bibliografía, dirigen investigaciones y comunican el estado de un pensamiento propio y en contínua expansión, a estudiantes maduros, automotivados y capaces de autodirección. Una educación para muchos requiere de otras condiciones que reemplacen el efecto de la selección.

¿Es posible superar un paradigma docente que desecha el talento de muchos alejándolos de las aulas y que no tiene una preocupación central en el desarrollo del talento de los que permanecen en el sistema?

¿Es efectivo que lo que no otorga la naturaleza, la experiencia previa al ingreso a la educación superior o el esfuerzo propio, no puede ser construido por el estudiante con el apoyo acertado y oportuno de un sistema universitario con la capacidad para hacerlo?

¿Es posible un nuevo paradigma de educación superior centrado en el desarrollo del talento - del talento de todos - sus participantes?

Asi como es paradoja que la educación superior no crea en la educación, y que por lo tanto no incorpore en sus prácticas lo que en educación se aprende, también lo es que se forme profesionales, intelectuales y científicos para una sociedad que requiere de una contribución generosa y cooperativa de todos sus miembros.

En efecto, la sociedad hace un esfuerzo considerable para crear, sostener y financiar sus instituciones de educación superior. Cerca de un tercio del presupuesto destinado a la educación - en el caso de Chile - se gasta en el nivel terciario: 1% del PNB de un total de 3,2% del PNB para educación (datos de 1983). Sería un error pensar que lo hace para preparar a sus hijos, los de unos pocos en todo caso, para que ellos personalmente logren altos niveles de capacidad y tengan grandes ventajas comparativas en su vida laboral, indudablemente la educación superior tiene objetivos sociales.

Si la universidad acepta - como ineludiblemente debe - el mandato social de contribuir al desarrollo de toda la sociedad, debe cautelar para que la formación que reciben sus estudiantes los prepare para el trabajo cooperativo, en el que los grandes valores del espíritu prevalezcan por sobre los valores del logro personal; en el que la capacidad de liderazgo exista y esté modulada por una comprensión profunda y crítica de las fuerzas que mueven a la sociedad entera. En tal caso resultarían incomprensibles las prácticas competitivas e individualistas que alienta el sistema de calificaciones y de evaluación en uso.

La relación uno a muchos en la sala de clases, la nota basada en pruebas que no miden necesariamente lo que el estudiante ha aprendido, la necesidad de vencer por sí solo vallas impuestas por un docente que aparece como el que ostenta el poder, la necesidad de sobresalir en esa carrera por sobre sus compañeros, el anonimato de una aula saturada, la imposibilidad de "mirar hacia otros horizontes" para no perder puntos en los que es urgente, la atención casi exclusiva en los contenidos, con prescindencia de las implicaciones sociales, psicológicas, culturales o filosóficas, para nombrar algunas, son prácticas que fomentan de un modo muy efectivo el individualismo y la competividad.

Todo induce a pensar que el desarrollo de una nación pasa por, y tiene origen, en las capacidades de su gente. Siempre, pero particularmente hoy las capacidades necesarias para ese desarrollo comprenden las necesarias para resolver problemas complejos, las que permiten al ser humano comprender primero y luego modelar los fenónemos naturales y sociales, y aquellas que permiten aplicar ese conocimiento en la búsqueda de nuevas y mejores condiciones de vida. En el centro de esas capacidades se encuentra el uso, el desarrollo y la invención de modelos matemáticos.

El extremo simple, casi trivial del problema, lo representa la selección de los más aptos y la correspondiente imposición de un conjunto de exigencias altas que adquieran esas capacidades y busquen luego las soluciones que la sociedad requiere. Es conocido el hecho de que existe una pequeña proporción de seres humanos que aprenden con muy poco apoyo. Es tal vez para ellos que T. Carlyle acuñó su definición de universidad: "una buena biblioteca y... unos pocos elementos de apoyo".

¿Cuáles serían las características de una institución de educación superior pensada para que cada uno de sus participantes explore sus capacidades y desarrolle al máximo sus potenciales?

¿Cómo sería la educación superior centrada en la educación y no en la selección de talentos?

¿Qué patrones conductuales caracterizarían las relaciones entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre ellos y el concimiento, si la universidad estuviese preparada para formar profesionales, intelectuales y científicos capacitados para el trabajo creativo, cooperativo y socialmente motivado?

Este trabajo tuvo por objeto explorar estas cuestiones desde el punto de vista de la pedagogía universitaria y del desarrollo actual de las ciencias cognoscitivas. Específicamente se trató de:

1. Seleccionar los factores que influyen, determinan o condicionan el aprendizaje de la matemática en el nivel terciario.

2. Detectar antecedentes y estudios realizados o en curso, potencialmente valiosos para mejorar las condiciones actuales de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en ese nivel, y

3. Determinar áreas en las que es particularmente interesante realizar estudios o experimentar para obtener las referidas mejoras.

Los supuestos y los conceptos que orientaron este análisis

A modo de un marco de referencia mínimo, se expresan, a continuación, los supuestos que sirvieron de base para analizar los factores que se enuncian y comentan en la sección siguiente.

1. Los objetivos del aprendizaje de la matemática, en el nivel terciario, remiten a la formación de estructuras intelectuales dinámicas, generalizables, aplicables, inter-relacionadas y autoreguladas, construidas por el que aprende. Esta concepción se opone a la priorización de los contenidos por sobre el desarrollo de las capacidades para aprender, manejar, aplicar, evaluar y crear conocimiento.

2. Los objetivos del aprendizaje matemático cubren una amplia gama de operaciones cognitivas, de elementos metacognitivos, de estrategias cognitivas de orden superior y de condiciones afectivas y de actitudes; todas esas dimensiones del aprendizaje deben estar presentes en un programa de formación en la disciplina en sus niveles superiores (ver anexo No. 1).

3. Una parte importante de las barreras que la educación superior opone al aprendizaje de la matemática tienen sus raíces en convicciones acerca de lo que es y no es matemática, educación y universidad; en costumbres y diversos aspectos de una "cultura universitaria" particular y en prácticas relacionadas con la administración de la enseñanza y de los medios para facilitarla.

Esto significa que si bien muchos de los factores que analizaremos se manifiestan en el aula, remover las barreras o modificar esos factores no es posible desde ese nivel. En la práctica, el control de estas situaciones escapa de las manos del profesor como actor individual.

4. El aprendizaje tiene una componente social y una individual. En estas materias la docencia universitaria presenta dos distorsiones que deben ser analizadas. En efecto, los sistemas universitarios favorecen las situaciones de aprendizaje socializados (clases) por sobre los individuales (salas de estudio, salas multimedios, bibliotecas, laboratorios) y luego, en la evaluación, sólo interesa medir los logros de cada individuo. A la inversa, desde el punto de vista de los objetivos de los programas de formación profesional, se propician los aprendizajes relativos al contenido (matemática, física, mecánica, etc.) y se descuidan los aspectos sociales de la personalidad (liderazgo, iniciativa, cooperación, etc.); también a la hora de evaluar esos programas, se pone el acento - y se deplora la falta - de estos últimos.

5. Los factores que se analizan tienen efectos mayores en los niveles inferiores de los programas universitarios y difieren, en cuanto a sus efectos, según se trate de a) cursos de matemática básica o para la formación general; b) cursos de matemática orientados hacia la especialización

en la disciplina; c) cursos para futuros docentes y d) cursos para la formación de profesionales que usan la matemática.

A modo de hipótesis de trabajo, se supone que estos factores son de mucha importancia en los cuatro primeros semestres de estudios universitarios y que son de naturaleza muy diferente para los estudios de postgrado. En este último caso el presente análisis no se aplicaría.

Es muy posible que esto se deba a la madurez adquirida por los estudiantes y a los efectos de la experiencia universitaria, pero es la opinión de los autores, que el principal condicionante de este efecto es el factor selección: simplemente salieron los que requieren de mayor apoyo y quedaron los más aptos. De cambiar la proporción de fracasos en los primeros semestres de matemática universitaria, esta situación debería reexaminarse.

6. Por último, haciendo un paralelo a los lineamientos que la Conferencia de Allenton Park (1972) enunció en relación con el concepto de currículo, la pedagogía universitaria no es una ni admite una definición única. Se trata de un término derivado, según sean los postulados educativos básicos, así será la concepción que se tenga de pedagogía universitaria. No se trata de un relativismo paralizante, sólo se reconoce la dependencia del concepto de un conjunto de decisiones valóricas más profundo.

En una publicación reciente y rica en ideas (González, 1988), a partir de la noción de estilos curriculares de Esiner (1979) y McNeil (1977), introducidos en nuestro medio por Abraham Magenzo. González expresa que la pedagogía universitaria tiene "magnitud, dirección y sentido" (p. 43), y que justamente estos últimos están dados por la concepción curricular. En este trabajo se plantean las preguntas que se deben responder para fijar la "axiomática" de una pedagogía universitaria:

a) ¿para qué se educa?;
b) ¿a quién servirán los egresados?;
c) ¿cómo se selecciona el contenido del currículo?;
d) ¿quién y con qué lógica lo decide?;
e) ¿cómo se jerarquizan las actividades y las asignaturas?;
f) ¿con qué criterios se evalúa y se selecciona a los estudiantes?;

Para comprender los efectos que tienen las decisiones que condicionan la actividad docente, considere las siguientes respuestas a dos de las preguntas planteadas por González (en el Anexo No. 2 encontrará otras).

¿Quién decide el currículo y con qué lógica?

- Los sabios con la lógica de la ciencia.
- Los profesionales con la lógica de su experiencia.
- La comunidad de acuerdo con sus necesidades y problemas más urgentes.
- Las autoridades con la del control y del poder.
- Los extranjeros con la de un mejor estándard de vida y la modernización.
- Los profetas con la lógica de la felicidad futura.

¿Con qué criterios se selecciona y se evalúa a los estudiantes?:

- Al más capaz.
- Al más trabajador.
- Al más comprometido con la posición que interesa.
- Al que sigue mejor las instrucciones del profesor.
- Al que tiene el pensamiento más ágil.
- Al más sistemático.

- Al que maneja mejor la disciplina.
- Al que sintetiza e integra mejor (p. 40 y 42)

Distintos sistemas universitarios, distintos profesores, responderán de diferente forma estas preguntas básicas. El conjunto de respuestas, hecho explícita o implícitamente, generan programas y cursos muy diferentes. Tan diferentes, que lo que es bueno en unos no lo será en otros. En resumen, las metodologías, los textos, las formas de proceder en pedagogía universitaria son consecuencia de opciones valóricas. Toda discusión acerca de estas cuestiones, todo intento de transformación de la práctica universitaria, deberá iniciarse con el esclarecimiento de ese basamento valórico.

Las barreras del aprendizaje o los factores que lo inhiben

Se trata de factores que usualmente significan barreras para muchos estudiantes, en cierto sentido son los misms que hay que manejar para facilitar el aprendizaje.

El estudiante que llega a la educación superior lo hace con un bagaje de habilidades generales, intereses, expectativas, motivaciones y un conjunto de conocimientos. Es indudable que toda la utilería cognoscitiva, los factores afectivos y sociales así como las capacidades psicomotoras con las que el alumno accede a la universidad, deben ser objeto de estudio y de consideración por parte de los que desarrollan la educación superior.

En esta oportunidad se adoptó el punto de vista de quien examina las barreras que el sistema universitario opone a esas capacidades, intereses y motivaciones, con el propósito de hacer propuestas tendientes a eliminarlas o a disminuir sus efectos.

Factores socio-económicos

Comenzamos con los factores más generales y externos al sistema para penetrar luego a los factores enraizados en la práctica universitaria misma. Entre los factores internos, se comenzó por los comunes a todas las asignaturas y se terminó con lo que se refieren a la matemática en particular.

Si hay un factor que tiene efectos en todos los ámbitos de la educación, ese es el nivel socio-económico de los estudiantes. También es cierto que este es el factor sobre el cual los actores de proceso tienen menos control.

1. Los medios. El acceso, la permanencia y las oportunidades para aprender en la universidad, están condicionados por los medios. Este es un factor obvio de fracaso y/o de entorpecimiento del aprendizaje, sobre el cual sólo cabe pensar acciones compensatorias. En todo caso nada o muy poco puede hacer al respecto el sistema universitario si no se conoce con precisión la envergadura del problema y la magnitud de la pérdida de talentos que significa.

Algunas de las preguntas que son urgentes de responder son las siguientes: ¿quienes acceden y quienes quedan fuera del sistema universitario?, ¿Cual es el costo social de las politicas de financiamiento actuales?, ¿cuál es el impacto real de las políticas de crédito universitario?. Las universidades mismas pueden investigar y entregar los elementos necesarios para evaluar estas cuestiones. Luego, desde el punto de vista de la vida universitaria misma, cabe pregüntar: ¿con qué elementos estudia el alumno?, ¿de qué modo puede hacer uso de su tiempo para estudiar?, ¿la casa, la biblioteca, las salas de la universidad, ... dónde y en qué condiciones?, ¿cómo puede el ambiente universitario favorecer el aprendizaje de los que no tienen medios?. En definitiva, ¿cómo evitar la pérdida de talentos causada por la pobreza?

2. Un aspecto algo diferente, pero muy relacionado, es la falta de estimulación cultural que experimentan los estudiantes provenientes de hogares en los que el nivel educacional es necesariamente bajo. ¿Cuál es el ambiente cultural que vive en su hogar o en su barrio?, ¿Cuánto difieren esos ambientes del que supone y propicia la universidad?, ¿con qué herramientas culturales enfrenta sus estudios?

3. Falta de apoyo afectivo. "Usted cuenta con nosotros", "tengo confianza en tí", este tipo de apoyo, en el ambiente familiar, es una determinante importante en los resultados finales de un estudiante. La familia no siempre tiene las características que le permiten significar, para el estudiante, un apoyo moral efectivo.

4. La discrepancia entre la cultura propia del estudiante y la cultura dominante en la institución universitaria. Para comenzar el "shock de la entrada". Para el estudiante proveniente de estratos sociales bajos y de hogares pobres, todo, en el ambiente universitario resulta ajeno, "no pertenezco", "no es mío", "¿qué hago aquí?"...En la educación básica y en la secundaria se han realizado diferentes estudios (Filp, Cardemil y Espínola, 1987), ellos muestran que esta discrepancia es decisiva. ¿Sucede lo mismo en la universidad?, ¿de qué modo se dá este fenómeno?, ¿con qué resultados?

5. Muy relacionado con el factor anterior, se encuentran los efectos de la "profesía autocumplida". Este es uno de los mecanismos clásicos de la reproducción cultural y de las formas en que se autoperpetúan las estereotipas iniciales. La investigación muestra que el alumno que más aprende, más recibe del profesor; y el que menos aprende, menos estimulación recibe. Se produce una suerte de estimulación diferencial que favorece a los que tienen ventajas de partida, aumentando, artificial y destructivamente, la dispersión entre los alumnos.

¿Cuáles alumnos se ven favorecidos por los prejuicios de sus profesores?: ¿cómo se distribuyen los estímulos según sexo, nivel socio-económico o según status en la clase?

Factores internos, los relacionados con la práctica docente

Al mirar dentro del sistema universitario, llaman la atención dos modelos básicos y determinantes; el autoritario, al analizar las relaciones de poder, y el modelo docente basado en la "clase expositiva".

6. La sustitución del aprendizaje por la enseñanza. La clase expositiva pone el acento en la actividad del docente, descuidando la actividad del alumno. La preparación de clases, la realización de la misma e incluso su evaluación, se centra en las acciones del profesor. La investigación educativa, por otra parte, demuestra que lo que hace la diferencia, lo que condiciona el aprendizaje, es la actividad del alumno. La investigación ha entregado evidencias suficientes para afirmar que los determinantes principales del aprendizaje son los conocimientos previos y la actividad o procesamiento intelectual sobre el material por aprender.

¿Cuál es la actividad que desarrolla el alumno para aprender?; ¿qué uso hace de la biblioteca?; ¿cuándo y cuánto lee?; ¿puede hacer una revisión bibliográfica?; ¿qué técnicas conoce para acceder al conocimiento publicado en revistas especializadas?; ¿puede leer, queremos decir, leer un libro o varios o artículos y sacar algún provecho?; ¿escribe, resume, puede exponer, puede obtener información por sí mismo?; ¿qué preparación tienen sus profesores en estas técnicas?; ¿están, ellos mismos, capacitados para analizar y para redactar informes técnicos?;

¿pueden asesorar el estudio independiente o la investigación?...

La clase oculta muchas de las respuestas a estas preguntas. Muchas veces están hechas, las clases, como un sustituto a la lectura de los alumnos. La clase tiene una propiedad insustituible: crear la ilusión del conocimiento. En la pizarra, escritas por un profesor que las conoce, las demostraciones se suceden y parecen vivir. Algo muy distinto sucede si se le pregunta al alumno, después de la clase, que use, que aplique, que explique esa demostración o esa idea.

La investigación muestra por su parte que sólo entre el 15 y el 20% de los estudiantes que escuchan una clase conferencia recuerda los aspectos escenciales de la misma (Serna, 1984, p. 54). Además, "Los alumnos difieren en las realidades que construyen o generan, en los procesos mentales que usan y en las estrategias de aprendizaje que puedan ser efectivas para ellos" (McCombs, 1984, p. 2). ¿Porque la universidad ha construido todo su aparato docente en torno a la clase magistral?

7. El factor tiempo. Entre los investigadores en educación se ha repetido el aforismo siguiente: "en educación, la variable tiempo es una constante".

El problema es que todos aprendemos en tiempos diferentes, algunos estudios hechos en el país muestran que entre adolescentes y jóvenes adultos, los avances en el aprendizaje de matemática puede llegar a diferir como para que la razón entre los valores extremos sea 1:7, esto es, hay alumnos siete veces más rápidos que sus compañeros (Oteiza, 1982).

El trabajo doctoral de Carroll (1963), es un clásico en la literatura educacional. Su autor mostró que la distribución de los resultados del aprendizaje según la curva normal: unos pocos aprenden, unos pocos no aprenden nada y la mayoría queda en algún punto intermedio, no es más que un artefacto que proviene del modo en que se administra la variable tiempo en la enseñanza.

¿Que racionalidad puede justificar que a alumnos que difieren en capacidades, en rapidez y en condiciones para aprender se les administre el conocimiento en cuotas iguales, en tiempos fijos, y se les someta luego a pruebas en plazos también iguales?

8. El factor conocimientos previos. "Ustedes recordarán...", comienzan muchas de nuestras clases; y es natural que así sea, el conocimiento es acumulativo y - por momentos - hasta secuencial. La falta de control sobre los aprendizajes previos que genera la docencia tal como la practicamos, es otro factor de ineficacia de los sistemas de educación superior. En un conocido meta-análisis de investigaciones hechas en diversos países, B. Bloom mostró que la variable en cuestión explica el 50% de la varianza de los resultados del aprendizaje (Bloom, 1977).

Si bien todos reconocemos la importancia que tiene el que el alumno pueda "llenar sus lagunas" de aprendizaje, poco o nada puede hacer el profesor para que sus estudiantes:
a) las reconozcan; b) sepan cuáles son;
c) sepan dónde encontrar la información que les hace falta y d) puedan remediar la situación oportunamente. Simplemente es demasiada información la que tendría que manejar cada profesor.

Se ha planteado que hay alumnos que pueden llenar por su cuenta las lagunas de instrucción. También se ha establecido que una componente importante de lo que se designa por aptitud académica es la capacidad para inducir el conocimiento implícito a partir de reglas anteriores, ejemplos, etc.

Los estudiantes que pueden elaborar sus propias estructuras cognitivas y descubrir el conocimiento estratégico necesacio a través de la inducción mostrarán una transferencia más fácil a problemas nuevos, diferentes y más difíciles que se den en la instrucción posterior, se dice que estos estudiantes tiene aptitud académica (Snow, 1982, p. 19).

La cuestión es dónde, sobre que conocimiento la docencia hace que el alumno que posee esta capacidad la use, ¿en las lagunas del conocimiento pasado mientras prepara la prueba, o en la creación de conocimiento nuevo?. Por otra parte, ¿qué sabe el profesor universitario acerca de la formación de esas capacidades?.

Dado el peso que tiene la variable conocimiento previo en los resultados, esta es un área de investigación en la que los sistemas de educación superior deben invertir recursos e incentivar trabajos de investigación y de desarrollo.

9. Los factores o variables afectivas. El mismo Bloom muestra en el referido estudio que los afectos con los que el estudiante ingresa a una situación de aprendizaje da cuenta o explica el 25% de la varianza en los resultados (Bloom, 1877). Resultado tanto más interesante si se le compara con el peso que el autor determina para la calidad de la enseñanza, también este factor tiene un 25%. En otras palabras, ¡las variables afectivas equiparan los esfuerzos del docente!

En realidad, las condicionantes afectivas de aprendizaje han resultado ser una verdadera caja de sorpresas para los investigadores en educación. El concepto que los estudiantes se forman de sí mismos, las actitudes que adoptan, la capacidad que adquieren, o no adquieren, para autodirigir su aprendizaje, las motivaciones, los conceptos que se forman de sus profesores y autoridades, y las correspondientes a los propios docentes, conforman un complejo de campo de fuerzas que condiciona o modula el aprendizaje.

Las relaciones profesor-alumno, el ambiente de trabajo, el clima de confianza mutua (o de desconfianza) entre los diferentes estamentos de la universidad, la forma en que se ejerce la autoridad, el comportamiento de cada uno de los miembros de la comunidad universitaria, son elementos constitutivos de esos facores afectivos. Desconocerlos, actuar como si no existiesen, desconocer el peso que tiene sobre cada uno de los estudiantes, es un error que se paga en falta de motivaciones, en falta de cooperación, en falta de autonomía o de iniciativa personal, en un menor desarrollo de las cualidades morales que luego serán las que distingan o desprestigien el sistema universitario frente a la comunidad que recibe a sus egresados.

10. La evaluación de los aprendizajes. Nada más claro que la evaluación para conocer la filosofía de un sistema educativo. Aquí se resumen todas las preocupaciones que el sistema o el profesor consideran importantes. ¿Qué enseña el sistema de evaluación de los aprendizajes a nuestros estudiantes?.

En realidad, la parte más importante del modelo docente actual se juega en el momento de la evaluación, es la síntesis de un modelo autoritario de educación.

El estudiante aprende luego las reglas del juego, sabe que debe trabajar para pasar las pruebas, desarrolla toda una estrategia de cálculo, de trabajo y de organización para tener éxito en ellas. Estudiar para las pruebas es la actividad que signa su paso por la universidad. ¿Cómo se relaciona este proceder con los grandes objetivos de la universidad?, ¿qué concepto de conocimiento, de ciencia, de honestidad intelectual, de autoresponsabilidad, de intelectualidad, estamos fomentando en nuestros estudiantes?

La metáfora sobre cuya base se puede analizar el modelo de enseñanza universitario actual es la de la liebre, la zanahoria y el perro. Con una zanahoria adelante y un perro que la persigue, la liebre corre. El premio de una profesión que significa una carta de presentación para la vida y para el campo laboral y el castigo de la reprobación, la mala nota, la eliminación y la salida al terreno descampado, son razones más que suficientes para que todos estudien.

Sin embargo, la literatura muestra que la percepción por parte del estudiante de estar en control de la situación de aprendizaje y no de estar bajo el control de otros, es un elemento central para la motivación, perseverancia, responsabilidad y logro (Bandura, 1982; Weiner, 1979; McCombs, 1984).

Quien haya - como profesor universitario - tratado de escapar a este paradigma sabe muy bien lo que cuesta. Es muy difícil montar una asignatura sobre la base de motivaciones intrínsecas. El estudiante reconoce pronto cuáles son los niveles de exigencia, siente las presiones laterales del resto del sistema, y la asignatura que persigue la creatividad, la autodirección, el desarrollo de las capacidades y de los intereses personales se ve atrapada entre las tenazas de las otras urgencias.

En la Universidad Autónoma de México (Meleg y otros, 1984) y en la de los Andes, Colombia (Ramos y Viramonte, 1984), se desarrollaron proyectos para transformar los sistemas de evaluación en las ingenierías. En la Universidad Católica de Valparaíso se realizó, en 1985, un encuentro nacional sobre evaluación de los aprendizajes en el nivel superior (ver referencias). Impresiona todo lo que en estas materias se puede lograr: la evaluación puede ser una instancia que sirve para que el estudiante se conozca mejor a si mismo; para que decida cuándo está preparado para "ponerse a prueba", para desarrollarse como estudiante independiente y para que tanto él como el profesor sepan sobre su ubicación en el programa y acerca de las alternativas para continuar.

La evaluación de los aprendizajes es un factor central de la pedagogía universitaria, se justifica la formación de equipos interdisciplinarios que estudien el fenómeno, experimenten y propongan innovaciones en esta materia.

11. Falta de manejo de los factores que influyen en la forma que se atiende, se selecciona información, se la almacena, se la recupera, así como en las habilidades para aplicar el conocimiento, modificarlo, reorganizarlo, ... en general de las técnicas para el monitoreo del propio aparato intelectual. El educador cumple con la paradoja anotada por Papert: al educador le parece natural no enseñar a pensar. ¿Quién lo hace entonces?

Factores que derivan de la forma en que se concibe la matemática

12. La matemática es difícil, luego es natural que muchos fracasen. Este es una estereotipa que prefigura los resultados. El prejuicio tiene como siempre una base de verdad, el problema es que oculta deficiencias de enseñanza, evita análisis más profundos y por lo tanto es una de las razones que impiden apreciar y detectar errores y problemas en la forma en que se enseña y en la que se aprende matemática. Con un diagnóstico más fino tal vez se encontrarían fallas en la formación previa, fallas en la forma en que el alumno estudia, errores de concepto, o simplemente deficiencias en los procedimientos de enseñanza.

13. El uso prematuro y excesivo de los formalismos. El educador matemático Z. Dienes insistió en la necesidad de proponer a los

estudiantes lo que llamó los "dos momentos de la matemática". De ellos, el que se presenta habitualmente es el segundo, aquél en el que el conocimiento se encuentra sistematizado y expresado por formalismos convenientes. Queda así excluido el primer momento de la matemática, el tentativo, el exploratorio, el que contiene errores, repeticiones e imprecisiones, el momento de las intuiciones básicas. Si se quiere proponer un conocimiento constructivo, este primer momento no puede quedar fuera del aula.

14. Inadecuación de los tiempos en el curso y los tiempos y experiencias necesarias para el aprendizaje de los conceptos más importantes. ¿Recuerda usted el tiempo que le tomó llegar a una concepción acabada de lo que es inducción completa, o límite, derivada, continuidad, matriz, integral,...? ¿ha observado cuánto tiempo transcurre entre la presentación de algunos de estos conceptos y un teorema que hace uso del concepto o la prueba?

15. También existen las limitaciones del conocimiento del profesor. Los problemas de enseñanza en la asignatura tienden a perpetuarse ya que existe una tendencia fuerte a enseñar del modo que aprendimos. A falta de conocimientos en educación, el docente se atiene a la estructura del contenido y a la expresada por sus profesores o por los textos que le sirvieron de guía. Esas estructuras suelen no ser lo suficientemente ricas como para formar matemáticamente.

La matemática se enseña del modo que se la aprendió. El profesor que aprendió matemática como un conjunto de conocimientos y procedimientos aislados del contexto, separado del resto del conocimiento matemático o sin historia y sin aplicaciones, tiende a comunicar un conocimiento matemático al que le falta la componente dinámica. Pensar matemática, hacer matemática, pensar con la matemática, es mucho más que repetir resultados.

Los porqué, los para qué, las intuiciones básicas, los modelos elementales sobre los cuales se construyó el concepto, lo simple tras lo complejo y lo concreto tras lo abstracto, son piezas claves de un conocimiento transferible, rico en posibilidades de extensión, aplicación y de generalización. La herradura de Smale (o la forja de espadas toledanas) y el tratamiento de sistemas no lineales en teoría de caos, los números primos y las permutaciones y los teoremas de Silow, los líquidos en movimiento detrás del teorema de Stokes o del teorema de Gauss, el movimiento planetario y la primera ecuación diferencial, para nombrar algunas.

El educador debe poner en contacto estrecho al estudiante con esas intuiciones básicas, para esto debe comprender él mismo, su pensamiento, la forma en que él elabora el pensamiento matemático.

Existen, además, diferencias individuales importantes en las formas de representar el conocimiento. ¿Cuáles son las formas de representación que usa el docente?, ¿qué canales de comunicación usa preferentemente?, ¿cómo interactúan esas formas y canales con la de sus alumnos?, ¿qué nivel de conciencia tiene el profesor de sus propias formas de representación y de las de sus alumnos?

16. La falta de una filosofía que oriente la enseñanza de la matemática. Diferentes concepciones generan enseñanzas muy diferentes. Los profesores no conocen el campo de la educación matemática y aplican preconceptos o teorías ingenuas en la docencia. Las más de las veces se adscriben al modelo contenidista clásico con algunas variantes provenientes de otras escuelas o estilos. El resultado - generalmente - carece de la penetración y de la fuerza de una filosofía clara hecha cuerpo en una metodología consistente.

Revista UNIBE cienc. y cult. 1990; 2(1): 9-33

Una mirada a este aspecto de la cuestión puede servir para la ubicación de las discusiones que debieran de seguir a este trabajo.

El modelo clásico es el asignado por la estructura fuerte de la propia matemática, se enseña de acuerdo con la secuencia y los acentos propios del conocimiento, en el cuadro de opciones curriculares citado en la sección de supuestos, el profesor adscribe la postura del racionalismo académico. No es la única opción posible ni la que mejor garantiza resultados.

Modelos alternativos

Entre las alternativas a la enseñanza clásica de la matemática, es posible citar las siguientes:

• La propuesta de Piaget: el desarrollo individual sigue lineamientos epistemológicos, las estructuras más generales preceden a las más específicas y particulares (el pensamiento topológico precede en el niño al pensamiento afin o métrico). Las matemáticas se aprenden operando sobre estructuras construídas por el que aprende. Cada estructura prepara la existencia de la siguiente. La capacidad operatoria determina las etapas evolutivas del pensamiento, cada individuo debe pasar por esas etapas, y experimentarlas a fondo antes de pasar a la siguiente. Este pensamiento orientó, parcialmente, el movimiento de las "matemáticas modernas".

• La propuesta de Dienes. Con fundamentos en el trabajo de Piaget y con una rica formación matemática, el húngaro Zoltan Dienes generó, en la década del sesenta, una filosofía para la enseñanza de la matemática. La matemática se construye, la construye el que aprende a partir del contacto con estructuras concretas (propuso múltiples concreciones para cada estructura) que le permiten abstraer y generalizar. La matemática tiene dos momentos, el primero basado en la intuición, en la exploración, es tentativo, busca sin conocer los resultados de la búsqueda, el error es frecuente y parte de esa búsqueda; el segundo momento es formal, hipotético-deductivo, el conocimiento se viste de formalismos que lo hacen comunicable. Los docentes enseñan a partir del segundo, privando al estudiante de la formación para hacer matemática, ambos momentos deben estar presentes en la docencia.

• La intuición de Freudenthal. En Holanda, otro matemático fue pionero en la reforma de la enseñanza de la matemática. Freudenthal sostiene que Piaget postuló el paso de las estructuras pobres (más generales) a las ricas, piensa que es un camino errado. También se inclina por la construcción del conocimiento por parte del que aprende. La matemática es una actividad natural y social del ser humano. Caracteriza su filosofía por medio de afirmaciones polares:

La matemática como actividad humana más que como asignatura ya confeccionada.

Matematización de la realidad más que realidad ya matematizada.

Reinvención mejor que transmisión de ideas.

La realidad como fuente de la matemática más que como campo de aplicación de la misma.

Las matemáticas relacionadas mejor que las matemáticas aisladas.

Contextos ricos en experiencias matemáticas mejor que conjuntos de problemas expresados verbalmente.

Elaboración de figuraciones mentales (visualización dice la literatura actual), más que asimilación de conceptos. Multiplicidad de enfoques más que concreciones múltiples (una respuesta a Dienes) (Freudenthal, 1979, p. 342-343).

• La matemática y el acento en sus aplicaciones. Como una primera reacción al movimiento de las "matemáticas modernas", se propuso usar como eje de la enseñanza las aplicaciones de la matemática. En este enfoque se puso el acento en el concepto de modelo y se generó mucho material para que el estudiante conociera las aplicaciones de la matemática a las ciencias físicas, biológicas, químicas, a la economía, la sismología, la mineralogía, etc.

-Muy cercano al movimiento hacia las aplicaciones, y también como reacción a los formalismos algo extremos de las "matemáticas modernas" se generó el centrado en la resolución de problemas. Los trabajos de Polya acerca de heurísticas y enseñanza de las estrategias de resolución fueron recuperados, investigados y aplicados. Existe hoy abundante literatura relacionada con este enfoque.

-El modelaje (modelling, el desarrollo de modelos matemáticos de diferentes situaciones de la realidad) es un enfoque muy activo en la actualidad. Particularmente en Inglaterra, se trabaja en el desarrollo de todo un currículo para los primeros cursos de nivel superior que tienen al modelaje como eje. David Burghess de la Universidad de Exeter ha publicado un colección de monografías al respecto. El tema mostró su vigencia actual en la sexta Conferencia Internacional de Educación Matemática celebrada en Budapest-Hungría en agosto del presente.

-La enseñanza de la matemática a partir de los preconceptos que tiene el joven, las llaman también teorías ingenuas, y sobre la base del análisis de las barreras conceptuales que todos tenemos en relación con determinadas ideas u objetos matemáticos. Se trata de un enfoque post piagetano con ciertas semejanzas a la propuesta de Freudenthal. Nicolas Balacheff en Francia, desarrolla el concepto en relación con el aprendizaje de las demostraciones; también este tema y esta postura recibió mucha atención en la referida conferencia de Educación Matemática.

Investigación y desarrollo ; áreas potencialmente valiosas, cursos de acción posibles

Fijar la atención en las barreras que el sistema universitario opone al estudiante no significa desconocer los méritos de los docentes. El punto de vista adoptado y el propósito de este trabajo son otros. Se trata de determinar los aspectos en los que es importante obtener información, investigar, experimentar y proponer soluciones.

La literatura especializada en la educación superior latinoamericana muestra que los temas generales acerca de la universidad y la gestión docente han recibido bastante atención y que en torno a ellos se está produciendo una cierta acumulación de conocimiento. Organizaciones como CREFALC (Unesco), PREDE (OEA), CINDA (Centro Inter-universitario de Desarrollo), ICFES (Instituto Colombiano de Fomento de la Educación Superior) y CPU (Corporación de Promoción Universitaria, en Chile) han tenido parte activa en ese fenómeno de acumulación. En particular los autores encontraron gran cantidad de material sobre pedagogía universitaria en las publicaciones del proyecto de Pedagogía Universitaria en América Latina: PREDE / OEA - CINDA.

La misma literatura muestra que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior es un tema escasamente estudiado en nuestro continente.

¿Hacia dónde orientar los esfuerzos?, ¿cuáles son las preguntas que vale la pena responder?, ¿cuáles son los problemas sobre los cuales concentrar la atención ahora y en el futuro cercano?, ¿cuáles son las líneas de pensamiento actual sobre las cuáles basar los estudios en estas materias?. Estas son las preguntas que un encuentro de la naturaleza de las Jornadas Nacionales en Educación Matemática, debe responder.

A continuación una propuesta para ser analizada en los grupos de trabajo.

Un programa de trabajo: propuesta para generar un pensamiento en educación matemática en el nivel superior

Consideren las siguientes hipótesis de trabajo:

1. La docencia y los resultados del aprendizaje en matemática en el nivel terciario, para mejorar sus niveles actuales, requieren de información válida y confiable, así como de investigación y de acciones de desarrollo a partir de esa investigación.

2. La universidad comprende que su actuación y la superación de sus propios niveles de operación requieren de un esfuerzo de investigación, de innovación y de desarrollo.

3. En las diferentes facultades de ciencias y/o departamentos de matemática en los que se imparte docencia en este nivel existe un conjunto de profesores de matemática que desean aprender de la experiencia propia, validar los resultados de sus observaciones espontáneas, que están dispuestos a aprender métodos y técnicas de investigación y a dedicar una parte de su trabajo en actividades destinadas a mejorar la práctica educativa propia y la de sus unidades académicas.

4. Estos docentes conforman grupos de estudio que a su vez publican resultados, los somenten a la evaluación de sus pares, intercambian información con grupos homólogos de otras instituciones de educación superior y participan de un proceso de acumulación de conocimiento y de su correspondiente aplicación a la solución de problemas en el área del aprendizaje y la enseñanza de la disciplina.

5. La universidad reconoce el campo de la pedagogía universitaria como un campo válido de investigación y de desarrollo.

Tal vez supuestos o condiciones iniciales demasiado fuertes, especialmente si se las contrasta con la situación actual en la mayor parte de las casas de estudios superiores del país y del continente, en todo caso se trata de una situación pensable, y en esta oportunidad se la somete a consideración de potenciales participantes en un tal programa. El objeto: desarrollar un pensamiento propio en educación matemática en el nivel superior, ponerlo a prueba y luego en práctica.

Estados de situación (estados del arte) y estudios preliminares

En una etapa inicial, con el propósito de crear las condiciones para incorporar los resultados de estudios más específicamente relacionados con la matemática, se requiere de estudios que resuman, organicen, sinteticen y analicen la información existente en relación con:

1. Políticas nacionales en materia de educación superior y en la de desarrollo científico y tecnológico en los países latinoamericanos.

2. Programas de pedagogía universitaria existentes, sus fundamentos, sus procedimientos y sus resultados.

3. Acceso a la educación superior. Los procedimientos de selección de alumnos y su impacto en la formación en matemática.

4. Análisis cuantitativo de la enseñanza de la matemática en el nivel superior: estadísticas básicas, número de estudiantes por curso y nivel, indicadores de retención, indicadores de calidad de la enseñanza; en conjunto un cuadro que describa cuantitativamente el campo.

5. Qué matemática se enseña a qué estudiantes. Un estado de situación de los currículos de matemática, la parte cualitativa del currículo matemático en el nivel terciario.

Estos estudios culminarían en monografías destinadas a describir los diferentes aspectos señalados. Estos "estados del arte" servirían de base para los estudios a realizarse en currículos, niveles o asignaturas de matemática específicos.

Información acerca de los actores del sistema: alumnos, profesores y administradores.

Así como los estudios preliminares analizarían información existente, deberían organizarse otra serie de investigaciones con el objeto de entregar un cuadro vivo de la actuación de los principales actores del sistema, de sus expectativas, necesidades, problemas y percepciones.

¿Qué piensan, que sienten, que ven y cómo opinan los actores del proceso? Estamos acostumbrados a mirar el mundo desde nuestro punto de vista o desde el que posee el estamento en que nos encontramos. Los procedimientos de la ciencia sirven precisamente para objetivar el conocimiento. La pedagogía universitaria se vería muy favorecida si en su base se hiciera uso de información de tipo etnográfica acerca de los actores del sistema. Caben al respecto preguntas como las introducidas al comienzo del apartado anterior:

¿Cuál es la vida del estudiante en el campus universitario?, ¿cómo usa su tiempo?, ¿dónde y cómo estudia?, ¿tiene los libros necesarios, el espacio, los laboratorios...?, ¿cómo organiza su tiempo?, ¿cómo estudia, qué apoyo le hace falta?. ¿Qué actividad cultural hace, puede hacer o aspira a realizar?, ¿cuáles son sus expectativas?, ¿cómo percibe a sus profesores, a sus autoridades, su propia participación en la construcción de la universidad?. ¿Cuáles son sus problemas, sus puntos fuertes?

Los docentes, somos otros de los actores de este proceso. El profesor debe realizar actividades de docencia, de investigación, de extensión, de asistencia técnica y de administración. ¿Cuál es la vida del profesor universitario?, ¿puede realizar las funciones que le corresponden?, ¿con qué medios, con qué apoyo, con qué distribución de tiempo?. ¿Cómo perciben su función y sus problemas los docentes?. ¿Cómo se compara este punto de vista con los de los alumnos y el de los administradores?. Las preguntas se pueden extender a las necesidades de perfeccionamiento, de tiempo para el estudio, de condiciones para poder producir, escribir, publicar y crecer humana y profesionalmente.

¿Cómo perciben la vida universitaria los administradores?, ¿Cómo realizan su función?, ¿qué problemas tienen, cuál es su vida dentro de la universidad?, ¿de qué manera conciben la universidad, su papel y el de los demás factores del proceso?

La observación, la entrevista espontánea, la aplicación de técnicas etnográficas (Rockwell, 1980 en De Tezanos, 1986), y el uso de marcos de referencia sociológicos, podrían contribuir a una mejor comprensión de lo que es la universidad en sus niveles operativos, y por ende, a una mejor definición de la pedagogía universitaria.

Un campo de estudio particularmente

importante lo constituye el "umbral" (tomamos la expresión de un proyecto de investigación desarrollado por J. Filp en CIDE); esto es, el conjunto de factores y variables que inciden en el ingreso al sistema de educación superior, y los que inciden en los resultados del proceso durante los primeros pasos del alumno en el mismo.

Tres áreas de investigación y desarrollo particularmente activas y potencialmente valiosas

Qué Matemáticas enseñar.

El pensamiento más conservador en materia de programas de matemática es fácil de comprender y de justificar. Así como para Newton el trabajo de Euclides fue inspiración suficiente, se puede argumentar que con lo publicado, digamos por Gauss, hay material suficiente para formar a un estudiante universitario. Sin extremar el asunto, se puede pensar que los programas de hoy representan un compromiso adecuado entre lo básico para recibir una formación én matemática, lo aplicado para comprender su papel en el campo de la propia especialidad y lo nuevo. Puede que lo sea. Consideremos sin embargo lo siguiente:

En un libro que lleva seis ediciones desde 1980 (Davis y Herch, 1984, 3a ed.), se propone el "dilema de Ulam" (el matemático Stanislaw Ulam). (...) en una conferencia para granduandos - dice Ulam - mencioné los resultados de un cálculo mental que había hecho en el camino a la universidad. ¿Cuántos teoremas nuevos creen ustedes que se publican al año en la actualidad? pregunté a los estudiantes (vale la pena detener la lectura y hacer el cálculo mentalmente). Al mencionar mi respuesta: cien mil, la audiencia dió un respingo. Algunas semanas más tarde recibí una carta de dos de los estudiantes graduados que me escucharon. Sobre la base de las publicaciones conocidas ellos estimaron que la cifra era muy cercana a ¡docientos mil! (p. 20, la traducción es libre, las cifras son las mismas).

En Hungría, el año pasado, se celebró una reunión para estudiar la enseñanza de fenómenos no lineales (Marx Ed., 1987). Los anales de la conferencia, vale la pena sean estudiados por docentes de nuestros departamentos de matemática, contienen cientos de presentaciones acerca de fenómenos no lineales, teoría de caos, geometría de fractales así como proposiciones de experimentos de toda índole que son modelados por esas herramientas matemáticas. El argumento lo resume muy adecuadamente el mismo George Marx del Departamento de Física Atómica de la Universidd Eötvös de Budapest.

La no linealidad se hace imporante en medios transparentes cuando se hace uso de un láser o cuando interviene una alta intensidad luminosa (óptica no lineal). Incluso en el vacío, aparecen términos explicables por la polarización en campos magnéticos de intensidad alta cerca de los núcleos (líneas espectrales de Lamb). Las desviaciones de la forma lineal de I/U condujo a la fabricación de transistores y microprocesadores. Estas regiones de no linealidad quedan, sin esperanzas, fuera de los límites de los libros de física elementales, los que consideran las leyes de Hook y de Ohm como axiomas fundamentales y no sólo aproximaciones lineales válidas para valores pequeños.
Los adolescentes, sin embargo, se sienten muy confortables en el mundo de la luz láser y de los chips de silicona (p. 7 el subrayado es de los autores).

"Welcome to the Non-linear Universe".
En Teaching Non-linear Phenomena - I. Anales de un taller internacional sobre el tema sostenido en Hungría en abril de 1987, George Marx editor.

Newton tuvo la fuerza para crear la matemática que le permitió a él - y a la humanidad después de él - comprender mejor el universo. El universo sigue siendo explorado, la matemática sigue siendo una herramienta poderosa en la comprensión del mismo, es responsabilidad de los educadores matemáticos estar alertas, evaluar el conocimiento, ser activos en la búsqueda de nuevas formas de comprender el entorno. La matemática es una ciencia viva, aprendámosla de ese modo y propongámosla así a nuestros estudiantes.

Ciencias cognitivas, modificabilidad de la inteligencia y factores afectivos y sociales en el aprendizaje.

"No saben pensar" dice con frecuencia el profesor universitario, agrega "la educación secundaria no los prepara para aprender matemática". Tampoco el sistema universitario enseña capacidades intelectuales, las supone.

En ausencia de un conocimiento específico acerca de cómo se forma el intelecto, en las situaciones de enseñanza habituales, se recurre a la entrega de dosis masivas de contenidos y a la exigencia de resultados sin necesariamente proveer a los estudiantes con los medios para lograrlos. Se lo hace con la esperanza de que además de aprender una parte de lo exigido, el tratamiento detone, en el aprendiz, los mecanismos internos que le permitan fijar la atención, seleccionar información relevante, establecer relaciones, hacerse preguntas, recurrir oportunamente a la experiencia pasada, o reformular los modelos que conoce, evaluar el progreso propio, planificar alternativas... en fin, aquello que caracteriza al individuo intelectualmente efectivo.

Los programas destinados a modificar las capacidades intelectuales, tradicionalmente llamadas inteligencia (Feuerstein, 1980; Hunt, 1980 y Sternberg, 1982; entre otros), han demostrado su eficacia. Autores como Sternberg llegar a afirmar:

> el enfoque de procesamiento de información ha sido particularmente exitoso en sugerir algunas directrices para entrenar el desempeño inteligente, tal vez por su énfasis en los procesos y en las estrategias que usan las personas cuando se comportan inteligentemente. Se han logrado resultados impresionantes en el entrenamiento de dominios tan diversos como el razonamiento, la resolución de problemas y la memoria (Detterman y Sternberg, 1984, p. 156).

Las capacidades intelectuales pueden entrenarse, es posible generar actividades libres de contenido, o sobre la base de contenidos seleccionados para ese entrenamiento, tales que el estudiante muestre progresos en su capacidad para aprender.

Las estrategias cognitivas y la metacognición (Gagne, 1974; Solomon, 1980; Dansereau, 1978; Flavell, 1981; Weinstein, 1982). En este caso la atención está puesta en los aprendizajes de orden superior con un énfasis en el continente por sobre el contenido. "Piaget afirma que el alumno no sólo aprende lo que aprende sino cómo lo aprende (...) Gagné define las estrategias cognitivas como destrezas de manejo de sí mismo que el aprendiz adquiere, presumiblemente durante un período de varios años, para gobernar su propio proceso de atender, aprender y pensar" (Antonijevic y Chadwick, 1982).

Otro campo de estudio potencialmente valioso en la búsqueda de una mejor educación superior lo constituyen las variables afectivas en el aprendizaje (Frieze, 1976; Shavelson y otros, 1976; Weiner, 1979; Bandura, 1981; Bandura, 1982; y Wittrock, 1984; para citar algunos de los autores más influyentes). Esta línea ha recibido bastante atención en nuestro medio a través de estudios sobre la teoría de atribuciones (Montero, 1984; Montero y otros, 1985 y 1987; González y Magenso, 1986). El propósito, contribuir en la comprensión de los mecanismos por medio de los cuales se forman las actitudes, los conceptos que los estudiantes tienen de sí mismos, las capacidades para dirigir el propio aprendizaje.

Si el objeto es generar un ambiente universitario en el que se forma el talento, si el desarrollo de las capacidades para pensar, para aprender y para monitorear independientemente el aprendizaje, la psicología contemporánea ofrece un conjunto de herramientas conceptuales para orientar la investigación en el desarrollo del talento matemático.

Informática y enseñanza de la matemática post-secundaria

En la actualidad hay en ejercicio toda una generación de matemáticos que se formaron con el computador. La antes mencionada teoría de caos y la geometría de fractales, son sólo dos de los ejemplos de campos de investigación activos en los que el computador juega un papel importante. El primer sistema experto para el apoyo de la investigación en matemática tiene casi dos décadas de existencia.

El computador es una herramienta poderosa y en el campo de la matemática ha demostrado especialmente su poder. Hay tres preguntas básicas en relación con el uso del computador en la formación matemática del estudiante universitario.

La primera guarda relación con su uso como apoyo a la investigación - o al menos exploración - de conceptos, ideas y relaciones matemáticas. ¿Cómo estructurar un laboratorio para el estudio de ideas matemáticas?, ¿Cómo estructurar los cursos de matemática para que las aplicaciones de la computación complementen la formación matemática?. El uso de los manipuladores simbólicos (Palmiter, 1986) están revolucionando la enseñanza del cálculo. En la antes referida conferencia de Budapest se informó, por ejemplo, que de 47 departamentos de Matemática en las universidades de Italia, 39 han implantado cursos de cálculos en que se hace uso extensivo de los citados paquetes y de otras formas de aplicación de la computación al tratamiento de los problemas de cálculo.

Una segunda cuestión la plantea la informática como campo de especialización de muchos estudiantes universitarios. En efecto, en un estudio exploratorio reciente en la Universidad de Santiago (Arrata, 1988), docentes e investigadores en informática entrevistados señalaron cuáles son a su juicio, los tópicos de matemática requeridos por los cursos de computación. Entre los tópicos señalados están los que se enseñan actualmente y algunos nuevos. Los acentos deben estar, opinan los encuestados en: matemáticas finitas, lógica proposicional, de predicados, difusa y causal, análisis numérico, teoría de funciones recursivas y computabilidad, teoría de autómatas, variable compleja y señalan la necesidad de enseñar las matemáticas más adecuadas para la simulación de procesos complejos. Queda la pregunta ¿cómo adecuar la formación matemática a los requerimientos de una sociedad informatizada?

La tercera cuestión se refiere al uso del computador y de la experiencia con computadores para la educación matemática. Sea que se trate de enseñanza asistida por computadores, sea que se usen formas de programación para reforzar el pensamiento algorítmico o el pensamiento heurístico.

En conjunto, la informática plantea cuestiones de objetivos y cuestiones de medios, en ambos aspectos los educadores matemáticos pueden aprender, investigar y entregar un aporte (Oteiza, 1986, 1987 y 1988).

Síntesis y conclusión

En este documento se señalaron los factores que, a juicio de sus autores, inhiben y/o que facilitan el aprendizaje de la matemática; se propuso un modo de pensar la investigación y el desarrollo en materia de educación matemática en el nivel superior; se señalaron áreas en las que es necesario realizar estudios; se seleccionaron temas y también herramientas conceptuales para abordarlos.

Esperamos haber mostrado que son muchos los factores que deben ser comprendidos y clarificados antes de que un cambio significativo sea posible en la educación matemática post-secundaria. Es preciso tener presente que lo que se puede hacer con el paradigma predominante se hace o ha sido hecho. La clase expositiva como núcleo de todo el sistema es un modelo casi saturado, esto es, con esfuerzos grandes para optimizarlo sólo se logran ganancias marginales.

La selección de talentos, para regresar al punto con que comenzamos este análisis, es necesaria, pero, ¿son suficientes los existentes?. ¿Interesan sólo las elites o son necesarios los talentos intermedios?. ¿No será que las universidades, en su afán por la excelencia buscan la rosa olvidando que para tenerla en las manos o admirarla se requiere de un jardín?

El talento integral es escaso, casi por definición, se da en sólo en un área del conocimiento. Un intelectual, un profesional, un científico, debe aprovechar sus fuerzas y desarrollar sus puntos débiles si su meta es el ser humano integral. Existen buenas razones para pensar la universidad como un lugar en el que se desarrolla el talento.

Permanentemente estuvo en la mente de sus autores la imagen de una universidad concebida como un espacio para aprender. En oposición a la de una educación superior centrada en la enseñanza. Un espacio para investigar, conocer y conocerse mejor, un ambiente rico en estímulos, estructurado para dar alimento al espíritu y para entregar herramientas para el trabajo intelectual independiente, crítico, creativo, auto motivado y auto dirigido.

La universidad busca excelencia, en la actualidad se espera que el profesor universitario sea un docente y un investigador, se espera, además, que haga asistencia técnica y cumpla con labores de extensión. Importantes misiones, que tal vez "son funciones de la universidad como un todo" (Lavados, 1984) y no de cada académico. Las universidades harían bien en revalorizar la función docente. En el enfoque aquí propuesto, los docentes estarían investigando, generando desarrollo y eventualmente prestando servicios de asistencia técnica, en su materia, en la educación matemática en el nivel que les corresponde, junto a investigadores en la matemática misma, generarían las condiciones y los medios para transformar a la universidad en el semillero de talentos que la sociedad requiere.

En conjunto se propusieron las bases para un programa de investigaciones tendiente a generar un pensamiento en la materia y una traducción del mismo en la acción. Corresponde a los investigadores y a los grupos de trabajo evaluar esta propuesta, documentarla traducirla en acciones o proponer alternativas. Corresponde a la comunidad académica nacional, evaluar los resultados del trabajo de todos nosotros.

ANEXO NO. 1

Objetivos del aprendizaje matemático: categorías para clasificar y para seleccionar objetivos de aprendizaje. *

* Adaptado del marco de referencia del proyecto "Alternativas curriculares para la enseñanza de la matemática". Fidel Oteiza, investigador principal, desarrollado en la USACH con el apoyo de la Dirección de Investigaciones de esa Universidad (DICYT).

Una de las restricciones bajo las cuales opera el sistema universitario guarda relación con el carácter estrictamente contenidista de los objetivos. En el caso de la enseñanza de la matemática, el mensaje educativo está signado por la estructura lógica y secuencial de la matemática, tal como ésta se presenta en textos de estudio, en los programas y en la propia formación de los docentes.

A continuación se propone un esquema para clasificar y/o seleccionar objetivos para programas y cursos de matemática en los que se tome en cuenta la más amplia variedad de aprendizajes.

Con el objeto de que el alumno

a) en el área cognitiva:

1. aprenda a atender y a seleccionar los datos relevantes de la experiencia.
2. organice su propia experiencia;
3. cree procedimientos para almacenar, recuperar y para procesar información;
4. establezca relaciones;
5. aprenda procedimientos y estrategias para encontrar información;
6. aprenda a transferir lo aprendido;
7. resuelva problemas;
8. analice críticamente las soluciones dadas por otros;
9. aplique el razonamiento hipotético-deductivo (si A, entonces B, bajo las condiciones c);
10. aplique el conocimiento adquirido a situaciones diferentes a las estudiadas;
11. modele situaciones y fenómenos naturales y sociales;
12. establezca metas personales de rendimiento y criterios de éxito;
13. planifique sus propias actividades de aprendizaje y seleccione las estrategias a utilizar;
14. adquiera así las capacidades necesarias para la autodirección en el aprendizaje y la auto-evaluación de los mismos;

b) y en el área afectiva y social:

1. demuestre y mantenga interés por el aprendizaje;
2. adquiera y demuestre confianza en la capacidad propia para aprender matemática;
3. opte y aprenda a fundamentar sus opciones;
4. valore y adquiera las capacidades necesarias para el trabajo cooperativo efectivo;
5. demuestre una buena actitud hacia la crítica hecha por otros a su trabajo;
6. pueda defender sus decisiones y/o soluciones con argumentos;
7. aprenda a distinguir la crítica de las agresiones , aceptando la primera y sabiendo disolver la segunda;
8. conocer, valorar y juzgar equilibrada mente la cultura propia.;
9. conozca técnicas para el manejo de su motivación y de situaciones de stress.

El estudiante tomará contacto, hará uso, y demostrará dominio de:

1. conceptos;
2. algoritmos;

3. reglas o principios;
4. simbología y lenguaje matemático;
5. relaciones;
6. demostraciones (pensamiento deductivo);
7. generalizaciones (pensamiento inductivo);
8. estructuras formales;
9. resolución de problemas (pensamiento algorítmico y cuasi-algorítmico o heurístico);
10. aplicaciones de los modelos matemáticos a fenómenos naturales y sociales;
11. las técnicas para desarrollar modelos matemáticos a partir de situaciones o fenómenos dados;
12. lógica, reglas de orden superior y diversas formas del metalenguaje de la matemática.

ANEXO NO. 2

Implicaciones de las conceptualizaciones de la función docente para el mejoramiento cualitativo.

Tomado de:

Luis E. González, **Pedagogía Universitaria en América Latina. tercera parte.** CINDA, Colección Gestión Universitaria, 1988 pp. 40-42.

Preguntas que deben plantearse los planificadores curriculares... y los que están tratando de impulsar un mejoramiento de la educación superior.

a) ¿Para qué se educa? ¿Cuál es el propósito teleológico de la función docente? Entre las respuestas alternativas se pueden citar:

- para divulgar y desarrollar la ciencia;
- para formar personas moralmente aptas;
- para cambiar la sociedad actual;
- para que los egresados se adapten mejor a la sociedad en la que les tocará vivir;
- para que los profesionales puedan conseguir empleo, o para que compitan en mejores condiciones en el campo laboral;
- para que puedan ejercer roles de líderes en la sociedad;
- para que cumplan en forma eficiente una función técnico-específica;
- para que puedan definir su propio proyecto personal y se "realicen";
- para que contribuyan a mejorar la calidad de vida de los sectores más pobres;

b) ¿a quiénes servirán principalmente los egresados? Algunas respuestas alternativas pueden ser:

- a las necesidades que el gobierno ha establecido en los planes nacionales;
- a las propias necesidades de desarrollo personal;
- a cualquier necesidad que se genere en el medio donde ejerza;
- a las necesidades del sector popular;
- a los requerimientos de los principales empleadores en su área de trabajo;

c) ¿cómo se seleccionan los contenidos del currículo? Ejemplos de respuestas alternativas pueden ser:

- se generan a partir de un desarrollo epistemológico;
- se identifican a partir de concepciones político-económico-sociales;
- surgen de los requerimientos directos que se detectan en el campo laboral;
- se formulan considerando el desarrollo tecnológico;
- se fundamentan en los problemas locales;

• se determinan en conjunto con el pueblo;

d) ¿quiénes y con qué lógica deciden el currículo? Ejemplos de respuestas son las siguientes:

• los sabios con la lógica de la ciencia;
• los pares profesionales, con la lógica de la experiencia;
• la comunidad con la lógica de sus requerimientos y problemas más urgentes;
• las autoridades con la lógica del control y del poder;
• los extranjeros con la lógica de un mejor estándard de vida y la modernización;
• los profetas con la lógica de la felicidad futura;

e) ¿cómo se jerarquizan las asignaturas y actividades? Las respuestas indican que éstas se pueden priorizar indistintamente siendo el interés por la formación: teórica, práctica, moral, cultural, especializada, técnica, social, política;

f) ¿con qué criterios se selecciona y se evalúa a los estudiantes? Distintas respuestas indican que se puede fomentar y estimular diferentes tipo de criterios de evaluación. Por ejemplo privilegiando:

• al más capaz;
• al más trabajador;
• al más comprometido con la posición que interesa;
• al que sigue mejor las instrucciones del profesor;
• al que tiene el pensamiento más ágil;
• al más sistemático;
• al que maneja mejor la disciplina;
• al que sintetiza e integra mejor.

Esta lista da una idea muy general de las múltiples opciones frente a aspectos muy concretos que van perfilando estructuras curriculares, generalmente invisibles e implícitas... (p. 40-42)

Referencias y Bibliografía

Allenton Park, 1972, en Boletín de Educación No. 14 de la Unesco. Santiago-Chile: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe, 1973.

Antonijevic, N. y Chadwick, C. Estrategias Cognitivas y Metacognición. Revista de Tecnología Educativa, NO. 4, Vol 7, 1982.

Arrata, Miguel A. "Un Estudio Exploratorio de la Relación entre Matemática y la Enseñanza de la Informática". Universidad de Santiago de Chile, Memoria para optar al grado de Licenciado en Educación Matemática y Computación, 1988 (no publicada).

Bandura A. Self Efficacy Mechanisms in Human Agency. American Psychologist 1982, 37 (2) pp 147 (b).

Bandura A. y Shunk, D.H. Cultivating Competence, Self-Efficacy, and Intrinsic Interest Trough Proximal Self-Motivation. Journal of Personality and Social Psychology, 1981. Vol 41, No. 3, 586-598.

Bloom, B. Características Humanas y Aprendizaje Escolar. Bogotá, Colombia; Editorial Voluntad, 1977.

Carroll, John. "A Model of School Learning". New York: Teacher's College Records, No. 15, 1963.

Carss, Marjorie (Editor). Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education. Boston, Birkhäuser Inc., 1986.

Dansereau, D. The Development of a Learning Strategies Curriculum. H. O'neil (Ed.) Learning Strategies, New York: Academic Press, 1978.

Davis, Philip y R. Herch. The Mathematical Experience. Londres: Penguin Books, cuarta edición 1988.

De Tezanos, Araceli. "Seminario de Metodología de la Investigación en Educación, Etnometodología". Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Educación, Departamento de Sociología de la Educación, (mimeo), 1986.

Detterman, D. y Sternberg, R. (Ed.). How and How Much can Intelligence be Increased. New Jersey, E.E.U.U.: Ablex Publishing co., 1982.

Díaz, Leonora. "Un Estudio de la Relación entre Matemática y Campo Laboral". Universidad de Santiago de Chile, Tésis para optar el grado de Magister en Educación Matemática, 1987 (no publicada).

Eisner y Vallace. Conflicting Conceptions of Curriculum. McCutchan editores, 1979.

Filp, J. Cardemil y Espínola. Disciplina, Control Social y Cambio: estudio de las prácticas pedagógicas en una escuela básica popular. Santiago - Chile: CIDE, 1987.

Feurstein R. y otros. Instrumental Enrichment an Intervention Program for Cognitive Modificability. Baltimore, E.E.U.U.: University Park Press, 1980.

Flavell J. Cognitive Monitoring. P. Dickson (Ed.) Children's Oral Comunication Skills. New York; Academic Press, 1981.

Freudenthal, Hans. "¿Matemáticas Nuevas o Nueva Educación?". En Perspectivas. París; Unesco, Vol IX No. 3, 1979, (pp. 337-348).

González, Luis Eduardo. "Expansión de la Educación Superior y la Pedagogía Universitaria. Una Perspectiva de Consenso". Pedagoía Universitaria en América Latina. Antecedentes y Perspectivas. Santiago, Chile; PREDE/OEA-CINDA, 1984. (pp. 39-51).

González, Luis Eduardo. "Concepciones e Implicancias para el Mejoramiento Cualitativo de la Universidad Latinoamericana". En Pedagogía Universitaria en América Latina, Tercera parte. Santiago, Chile; Programa Regional de Pedagogía Universitaria CINDA, 1988. (pp. 23-46).

González L. G. y Magenzo, S. Después de la Educación Media; ¿Exito o Fracaso?. Santiago, Chile; PIIE, documento de trabajo, 1986.

Hunt, E. Intelligence as an Information Processing Concept. British Journal of Psycology, 1980, Vol. 71, pp. 449-474.

Lavados, Iván. "La Universidad en América Latina". En Pedagogía Universitaria en América Latina, Antecedentes y Perspectivas. Santiago, Chile; PREDE/OEA-CINDA, 1984.

McComs, Bárbara. "Metacognitive and Cognitive Components of Motivation: teaching self-awareness and self-management via a problem-solving approach" Trabajo presentado la reunión anual de la American Educational Research Association. New Orleans, E.E.U.U., 1984.

Mandelbrot, Benoit, "Fractals: how to imitate the mountains, the clouds and the trees, and to create weird and wonderful new shapes". En Chaos in Education, Teaching non-linear Phenomena-II. International Workshop on teaching non-linear phenomena at schools and universities, J. Marx (Editor), National Center for Educational Technology, Hungría, 1987.

Meleg, Andrés y otros. "Uso del Computador en la Docencia en Ingeniería". En Pedagogía Universitaria en América Latina, Antecedentes y Perspectivas. Programa Regional de Pedagogía Universitaria, CINDA, 1984 (pp. 88-92).

McNeil, John D. Curriculum a Comprehensive Introduction. Boston, Mass.; Little, Brown & Co.,1977.

Montero, P. "Does the Attributional Model of Motivation Apply to Organizations?" Tesis Doctoral, University of California. Los Angeles, 1984.

Montero, P. y otros. Atribuciones para el Exito o Fracaso en el Aprendizaje de la Matemática y sus Consecuencias Psicológicas. VIII Encuentro de Investigadores en Educación, 1985.

Olfos, Raimundo. "Antecedentes para la Innovación de la Componente Matemática del Curriculum Escolar, la perspectiva del docente". Universidad de Santiago de Chile, Tesis para optar al grado de Magister en Educación Matemática, 1987 (no publicada).

Oteiza, Fidel. "Un Curso de Matemática como componente de Programas de Educación de Adultos". En J. E. García-Huidobro, Alfabetización y Educación de Adultos en la Región Andina. Pátzcuaro-Mexico; Centro Regional de Educación de Adultos, UNESCO, 1982 (pp. 58-86).

Oteiza, F. y Montero, P. "Un Programa de Matemáticas para Adultos, Informe Final". Santiago, Chile' CIDE, 1977.

Oteiza, Fidel. "Influencia de la Computación en la Conducta Humana y en la Sociedad". Cuadernos. Santiago, Chile; Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas, No. 26, primer semestre de 1986.

Oteiza, Fidel. "Enseñanza de las Ciencias, la Matemática y la Tecnología, el Rol de las Comunidades Científicas". Proyecciones. Antofagasta, Chile; Universidad del Norte, Año 5, No. 12, 1986, pp. 3-16.

Oteiza, Fidel. "La Informática y la Enseñanza de las Ciencias, la Matemática y la Tecnología". Uso de la Informática en la Enseñanza de las Ciencias. Santiago, Chile; Oficina Regional de la Unesco, 1987, pp. 23-48.

Oteiza, Fidel. Informática, Educación y Sectores Populares, Unesco, Oficina Regional para América Latina y el Caribe, Serie EDUCACION CIENTIFICA Y TECNOLOGICA, Santiago, Chile, 1988.

Salomón, G. Medios y Sistemas de Símbolos Relacionados a la Cognición y el Aprendizaje. Revista de Tecnología Educativa. 6 1980. pp. 6-38.

Shavelson y otros. Self Concept: validation of construct interpretations. Review of Educational Research. 1976, Vol 46, pp. 127-148.

Snow, R. "The Training of Intellectual Aptitude". En How and How Much can Intelligence be increased. Detterman, D. y Sternberg, R. (Eds.). N.J., E.E.U.U.; Ablex Pu.

Co., 1982.

Sternberg, R. (Ed.) Handbook of Human Intelligence. Cambridge, Inglaterra; Cambridge University Press, 1982.

Quiroz, Alonso. "Bases para el Desarrollo de la Educación Matemática en Chile". Tesis para optar al grado de Magister en Educación Matemática, 1986 (no publicada).

Ramos, T y F. Viramontes. "Utilización de la Computadora en la Enseñanza de la Ingeniería". En Pedagogía Universitaria en América Latina, Antecedentes y Perspectivas, PREDE/OEA-CINDA, 1984 (pp. 147 - 154).

Universidad Católica de Valparaíso. Primeras Jornadas de Evaluación del Rendimiento en la Educación Superior. 28-29-30 de agosto de 1985. Valparaíso-Chile; Ediciones Universitarias de Valparaíso, 1986.

Weiner, B. A Theory of Motivation for Some Classroom Experiences. Journal of Educational Psychology. 1979, Vol 71, pp. 3-25.

Wittrock, M.C. Student's Thought Processes. University of California, Los Angeles (no publicado), 1984.

CINDA, 1994 (pp. 147 - 158).

Universidad Católica de Valparaíso. Primeras Jornadas de Evaluación del Rendimiento en la [illegible] [illegible] 29-30 de agosto de 1985. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 1985.

Weiner, B. "A Theory of Motivation for Some Classroom Experiences." Journal of Educational Psychology, 1979, Vol. 71, pp. 3-25.

Wittrock, M.C. [illegible] University of California, Los Angeles (no publicado), 1994.

[illegible] Cal., 1992.

Sternberg, R. (Ed.) Handbook of Human Intelligence. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[illegible] "Bases para el [illegible] [illegible] en [illegible] [illegible] (no publicado).

[illegible] "[illegible] de la [illegible] en el Rendimiento de la [illegible] [illegible] Latinoamericana [illegible] Perspectiva, 1992 [illegible]

El movimiento de los fluidos bajo fuerzas eléctricas

R. Cade *

La materia se mueve bajo la influencia de las fuerzas. Esto es uno de los hechos mas fundamentales de la física, y la base de la rama de la física que se llama la dinámica. Por ejemplo, una piedra soltada, cae al suelo bajo la fuerza de la gravedad. Un objeto suspendido por una cuerda, se mece, formando un péndulo, moviéndose bajo dos fuerzas, la gravedad y la tensión en la cuerda.

Los líquidos también se mueven bajo la fuerzas, si se abre una pluma, hay chorro de agua, otra vez debido parcialmente a la gravedad, pero en parte por otra fuerza, una fuerza interna del líquido, que se llama la presión. Si la superficie plana de un cuerpo de agua se altera, se producen ondas, otro fenómeno debido a la acción de la gravedad y la presión. El estudio del movimiento de los fluídos (líquidos y gases) bajo fuerzas, se llama la **hidrodinámica.**

Existen fuerzas de varia índoles, y un tipo muy importante es la fuerza eléctrica. El estudio del movimiento de los fluídos en la presencia de fuerzas que incluyen fuerzas eléctricas, es una rama especial de la hidrodinámica, la que se llama la **electrohidrodinámica.** Vamos a ver brevemente tres fenómenos electrohidrodinámicos.

1. **La rotura de una gota líquida.** Una gota esférica de líquido se mantiene en su estado esférico por la tensión superficial T. Precisamente, hay un equilibrio entre T, la presión interna pi del líquido, y la presión externa pe, el cual es representado por la bien conocida fórmula de Laplace:

$$\frac{2T}{a} = Pi - Pe \qquad (1)$$

siendo a el radio de la gota.

Ahora, si la superficie tiene una carga eléctrica de densidad superficial O, existe según la electrostática, una fuerza hacia afuera de $2\pi O^2$ por unidad de área. Siendo O relacionada a la intensidad eléctrica E por $E = 4\pi O$ (el teorema de Coulomb), esta fuerza también puede expresarse por $E^2/8\pi$. Entonces, si la gota tiene una carga eléctrica, la fórmula de Laplace se generaliza, haciéndose

$$\frac{2T}{a} = Pi - Pe + \frac{E2.}{8} \qquad (2)$$

FIGURA 1

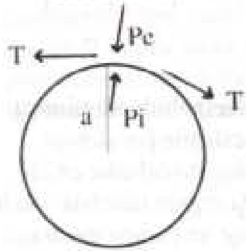
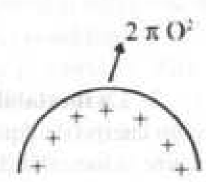


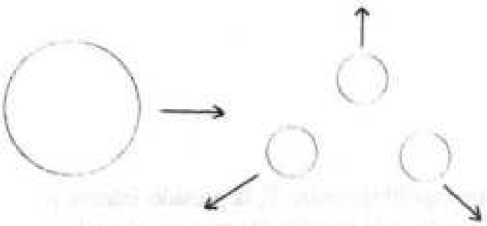
FIGURA 2



* Profesor Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

Sucede que, si x, y por lo tanto, E, es muy grande, el balance representado por la ecuación (2) no es posible y la gota explota.

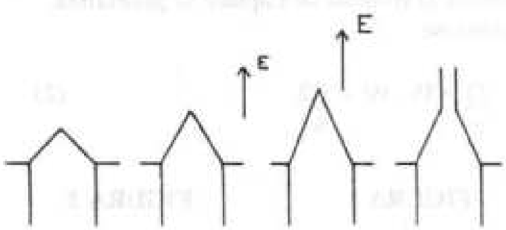
FIGURA NO. 3



Este fenómeno fue pronosticado y observado por Lord Rayleigh en 1883, y se pudiera decir que es el efecto pionero de la electrohidrodinámica.

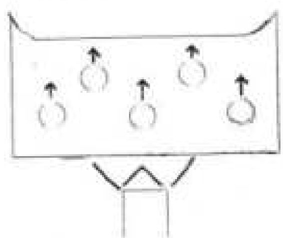
2. La distorsión de un menisco en un campo eléctrico. Si un menisco líquido está sujetado a un campo eléctrico, pierde su forma esférica y, en primer lugar, asume la forma de un cono redondeado por encima. El cono se hace cada vez mas agudo, hasta que, por fin, se emite una sución de gotitas, o un chorrito de líquido.

FIGURA NO. 4



3. **La inestabilidad electrohidrodinámica.** Si un cuerpo de líquido se calienta por debajo, ocurre la inestabilidad; el líquido caliente en el fondo, sube hacia arriba a la región mas fría. Se ha encontrado que, si se impone un campo eléctrico, el patrón de la inestabilidad se cambia, tanto en su forma de empezar como en el tipo de movimiento.

FIGURA NO. 5



Por estos tres ejemplos, hemos visto situaciones electrohidrodinámicas, situaciones en que el movimiento de fluidos es causado o influido por campos eléctricos. La dificultad del tema es de formular leyes matemáticas que gobiernan los fenómenos y por las cuales podríamos hacer predicciones.

En la hidrodinámica en general, un paso clave en esta dirección es el conseguir una **condición fronteriza**, es decir, una condición matemática que debe cumplirse en la superficie de un líquido.

Un actual trabajo del autor ha consistido en obtener una condición fronteriza electrohidrodinámica, dado que el líquido es un conductor eléctrico en un ambiente no conductor, y que su superficie S es una superficie de revolución. Con el motivo de escribir esta condición, introduzcamos la notación que contiene.

y: coordenada cartesiana hacia arriba, que coincide con el eje de revolución de S.

q: $\{1 + (dy/dx)^2\}$ 1/2, siendo $y = f(x)$ la ecuación del perfil (sección transversal de S) en el plano xy.

g: aceleración debida a la gravedad.

x,w: densidades dentro y fuera del líquido, respectivamente.

ni, ne: coeficientes de viscosidad dentro y fuera del líquido, respectivamente.

Momentos significativos de la actividad matemática en Cuba

Papel de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación

M. A. Jiménez y C. Sánchez Fernández *

Las condiciones para el desarrollo de la Matemática y su enseñanza no eran propicias en Cuba. Primero, porque los aborígenes tenían una de las culturas más atrasadas de toda América y, por tanto, sus representaciones matemáticas eran muy primitivas. Después, porque los colonizadores no se interesaron por estimular el desarrollo de la ciencia ni por establecer estudios de nivel superior con fundamentos sólidos de ciencias básicas. Tómese en cuenta que aunque la Universidad de Salamanca en España había sido de las más famosas del medioevo, la enseñanza se regía por los cánones escolásticos aún en el siglo XIX, y la matemática se reducía a algunos "libros de cuentas y geometría de sastre", como señalara el destacado matemático Don Julio Rey Pastor. Sólo con el nacimiento y ampliación gradual del movimiento iluminista criollo se fueron creando condiciones para la institucionalización de la ciencia y su enseñanza en la Cuba colonial. En 1728 se crea la Real y Pontifica Universidad de San Cristóbal de La Habana, en cuya Facultad de Filosofía existía una cátedra de Matemática que no se cubriría por falta de aspirantes hasta 1816.

Motivado por el poco interés de incidencia social de la Universidad, se crea en 1787 la Sociedad Económica de Amigos del País, gestora de la Real Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales, que se funda en 1861 y a la cual pertenecen insignes médicos y naturalistas criollos; pero ningún matemático, hasta que Don Isaac del Corral se incorpora a ella a principios del siglo XX.

Señalaremos que en la segunda mitad del siglo pasado se recrudece la lucha política e ideológica en Cuba debido al éxito del movimiento independentista en América y a las luchas sociales contra el absolutismo de España. El movimiento reformista en la enseñanza señalado admonitoriamente en 1795 por el prebístero José Agustín Caballero (1762-1835) encuentra seguidores locuaces y enérgicos en el prebístero Félix Varela (1787-1853). Don José de la Luz y Caballero (1800-1862), y en el héroe nacional cubano José Martí (1853-1895). Con su claridad ideológica intransigente, Martí sentenciaría en 1873: "España dividida, desmembrada en la política desmoralizada en la administración corrompida, en la industria atrasada, en el comercio pobre, en todo desvastada y decaída, no puede llevar a Cuba allí donde sus fuerzas vírgenes la arrastran, allí donde el comercio y el cuidado de un mundo nuevo y floreciente la atraen con invencible poder". Las reformas podían llevarse a cabo solo desde posiciones criollistas independientes y positivistas. No fueron las súplicas autonomistas las que lograron estos

* Profesores Universidad de La Habana.

 Revista UNIBE cienc. y cult. 1990; 2(1) 39-45

progresos, en este caso de la Universidad, ni la actitud sumisa de sus profesores: fue la lucha armada insurreccional la que creo nuevas condiciones que, por temor, obligó a la metrópoli a aceptar las concesiones.

Un impulso decisivo a las reformas curriculares se logra con la toma de posesión como Presidente de la recién creada Facultad de Ciencias en la Universidad de La Habana, del notable naturalista criollo Don Felipe Poey y Aloy (1799-1891) y en 1880, en el nuevo plan de estudio, aparecen las carreras de Física-Matemática, Física-Química y Ciencias Naturales y se abren las cátedras A y B de Análisis Matemático y Geometría Superior, respectivamente. En estas carreras se formaban principalmente los profesores de 2da. Enseñanza. Estos planes fueron perfeccionados en 1937, a raíz de la promulgación de la llamada Ley Docente. Estos nuevos planes consideraban una carrera de 4 años, con ejercicios de grado.

En 1990 nace la Escuela de Pedagogía de la Universidad de La Habana, que seria la segunda en América, solo antecedida por el Instituto Pedagógico de Chile. La Escuela de Pedagogía, con el impulso del ilustre maestro Enrique José Varona (1842-1933) sirvió para complementar con nuevos enfoques didácticos los claustros de maestros en la enseñanza media. Muchos de los egresados de la Escuela de Pedagogía se interesaron por recibir más tarde una formación especializada en la carrera de Física-Matemática.

Quien sería precursor del movimiento matemático cubano, el Dr. Claudio Mimó, nacido en Barcelona en 1861, llega a La Habana en 1883 y se hace cargo algo más tarde de la cátedra B de Geometría Superior. El profesor Mimó impregnó el interés por los estudios más profundos a la generación que propiciaría más tarde el surgimiento de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas en 1942.

Mientras tanto, en la Universidad de Madrid, van a defender tesis de doctorado los dos primeros criollos dedicados a la Matemática. Primero, en 1906, Don Isaac del Corral (1882-1946), quien trabajo en teoría de probabilidades y ecuaciones de la Física-Matemática. Dos años más tarde, el joven Pablo Miguel y Merino (1887-1944), con el tema de las "Integrales Eulerianas". Ambos van a prestigiar la Cátedra A de Análisis Matemático en la Universidad de La Habana. Isaac del Corral se hace cargo de la cátedra en 1913 y Pablo Miguel la adquiere en oposiciones en 1921 y la mantiene hasta su repentina muerte en 1944. Isaac del Corral fue miembro de diversas organizaciones científicas extranjeras; pero a pesar del mérito de algunos resultados originales, sus esfuerzos se pierden en el desarrollo de teorías paralelas a otras ya conocidas. Pablo Miguel lucho con denuedo contra las viejas estructuras buscando la introducción de los más modernos enfoques de su tiempo. A su alrededor atrae las primeras generaciones de matemáticos cubanos con clara conciencia del trabajo investigativo. Su obra se proyecta en Cuba y en el extranjero. Publica en 1914 "Elementos de Algebra Superior" y en 1941-42 "Curso de Cálculo Diferencia e Integral", textos de prestigio en toda latinoamérica durante muchos años.

Pero la obra más significativa de Don Pablo Miguel en el contexto de esta exposición, fue la fundación de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas en 1942. El 4 de enero de 1942, en ocasión de celebrarse el III Congreso de Doctores en Ciencias, Filosofía y Letras, en el local del Instituto de Segunda Enseñanza de Santiago de Cuba, se concibió su creación. El 25 de febrero de 1942, en el edificio Felipe Poey de la Universidad La Habana, se realizó el acto de constitución de esta sociedad en el cual resultó electo presidente el Dr. Miguel y Merino.

La revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas fue la primera en su género en Cuba y en ella se recogen 58 artículos en los 22 números que aparecieron entre 1942 y 1959, sin carácter periódico. Sólo alrededor de 30 de estos artículos tratan asuntos de investigación matemática y la mayoría de ellos pertenece a los mismos 5 autores. Las matemáticas más favorecidas fueron la teoría de ecuaciones diferenciales y las aplicaciones a la física teórica, con algunas incursiones en topología y astronomía.

Pero por muy brillantes que fueran estos pocos investigadores, por muy esforzados y persistentes que se mostraran los miembros de la Directiva de la Sociedad, siempre chocaron con ineludibles problemas que entorpecieron la formación de al menos una conciencia de opinión en la comunidad científica que permitiera cristalizar estos intentos en una investigación sistemática de la matemática y sus aplicaciones. Entre 1937 y 1960 se licenciaron alrededor de 200 graduados y la mayoría se dedicó solamente a la docencia de nivel medio. Se pueden señalar no más de 20 graduados en estos años que realizaran algún tipo de investigación matemática. Ninguno de ellos obtiene grado científico, aunque algunos reciben cursos de postgrados en universidades estadounidenses. Se destaca en este sentido, al profesor Mario O. Gonzalez y Rodríguez (n. en 1913) que adquiere título de Dr. en Ciencias Fisico-Matemática en la Universidad de La Habana en 1938 y en 1940 hace estudios de postgrado en la Universidad de Princeton, E.U.A. En 1944 sustituye a Pablo Miguel en la cátedra de Análisis Matemático y desde 1952 hasta 1959 fue Presidente de la Sociedad Cubana de Ciencias Físico-Matemáticas. El Dr. Mario Gonzalez representó a Cuba en numerosos eventos científicos internacionales, dicta conferencias en las Universidades de Puerto Rico, Buenos Aires, Caracas y Alabama (E.U.A). En 1960, durante una estancia en latinoamérica, que alargó sin consultar a las autoridades universitarias, fue separado de la Universidad de La Habana. Lamentablemente emigró a E.U.A., y no puso sus conocimientos (los más sólidos en Cuba durante su época) al servicio del desarrollo de su patria, cuando más se le necesitaba.

Es cierto que en el período 1940-1960 se fue adquiriendo cierto nivel de madurez científica y se ampliaron los centros de enseñanza superior. En 1949 se oficializa la Universidad de Oriente y en 1952 la Universidad "Martha Abreu" de las Villas; pero los tiempos que corrían no eran propicios para tales propósitos. La influencia imperialista imponía los intereses de las compañías norteamericanas, los cuales no eran precisamente los de elevar el nivel cultural científico de los profesionales y propiciar la investigación matemática. Además, la sangrienta dictadura de Batista obligaba cada vez mas a preocuparse por el mantenimiento de los elementales derechos de supervivencia y cada vez menos por el desarrollo de la ciencia. Los intereses de muchos de los profesionales que habían alcanzado un nivel superior, no eran precisamente los de ayudar a la elevación de nuestra cultura científica independiente, lo cual se constató cuando al triunfo de la Revolución, sin mucho esperar a definiciones, decidieron abandonar su patria y vivir en conocimientos a otros fines más lucrativos (lo cual, ciertamente, no todos lograron). Sirva de ilustración el hecho de que en la Universidad de La Habana, en 1960, sólo quedaba un profesor de Matemática del antiguo claustro, el Dr. Roberto Peña López (1921-1988) quien fue designado Decano de la Facultad de Ciencias y después Jefe de su Departamento de Matemática Aplicada. Posteriormente en el 1er. Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación en 1982 fue homenajeado como Miembro Emérito.

Contrapuesta a aquella actitud egoísta de los profesores que abandonaron su patria, se engrandece la actitud fraternal de varios profesores latinoamericanos y europeos que colaboraron activamente por la continuación de la enseñanza superior de la Matemática. Destaquemos al ingeniero Francisco Javier Guillén, del hermano pueblo de México, quien fue el primer extranjero que vino a Cuba después del triunfo de la Revolución, en 1961, contratado como profesor invitado para que explicara el curso de Análisis Vectorial y Cálculo Tensorial, que apareciera en la carrera de Ciencias Físico-Matemáticas. El profesor Guillén trabajó además en Algebra Lineal y Programación Lineal. Dejó un libro impreso en mimeógrafo sobre esta última asignatura, cuyos stencils el mismo mecanografió para que los estudiantes tuvieran en su poder en tiempo breve, las notas del curso. El ingeniero Guillén falleció en México hacia el año 1964. Por su trabajo abnegado y desinteresado se hizo merecedor de la gratitud de nuestro estudiantado y de la admiración de sus compañeros de trabajo.

Como planteara en 1963 el Dr. Fidel Castro: "Hicimos la revolución social para hacer precisamente la otra revolución, la científico-técnica"; pero los frutos de esta revolución no podían obtenerse de manera inmediata. Las condiciones heredadas no permitían materializar estos propósitos. La Reforma Universitaria de 1962 estipulaba el desarrollo multifacético y la formación integral de los especialistas, pero faltaba madurez científica. El profesorado que acometió los cambios en la enseñanza superior de la Matemática estaba compuesto de un grupo de profesores de enseñanza media que fueron convocados con estos fines, junto a una exigua cantidad de asesores extranjeros. En el 67 se hace la primera graduación de Licenciados en Matemática en la Universidad de La Habana en numero de 3. Al siguiente curso se gradúan 8 y así va en aumento sucesivo. Destaquemos que con el incremento de la matrícula y la carencia de profesionales, los mimos estudiantes tuvieron que impartir docencia en años inferiores. Esto caracteriza la situación de los años 60 y primeros años de la década siguiente. A partir de 1972 observamos un interés mayor por elevar el nivel de los graduados. Entre 1972 y 1976 se defienden alrededor de 30 tesis de maestría en Matemática, de ellas 4 en el extranjero. Un total de 13 graduados son enviados a la URSS, RDA y Yugoslavia, en becas para obtener grados científicos. En 1974 llega a Cuba el primer matemático se advierte también en toda la Ciencia. La Política Científica aprobada en las más altas instancias del Estado y Gobierno, en la que se propugnaba la combinación adecuada entra la investigaciones fundamentales y aplicadas, había hecho posible también el desarrollo de la investigación sistemática en Matemática.

El desarrollo de la actividad matemática a partir del triunfo de la Revolución el 1ero. de enero de 1959, ha sido tan vertiginoso y producto de esa rapidez y busca de nuevos caminos, tan zigzagueante, que resultaría demasiado extenso detallar los perfeccionamientos sucesiva de los curricula, la apertura de diferentes centros de estudio, la creación de institutos de investigación y la utilización de modelos matemáticos en la economía y los servicios. Sin embargo, a manera de complemento de los párrafos anteriores, describiremos después a grandes rasgos, la situación actual.

En cuanto a la computación, el desarrollo se inició en las década del 60, cuando a pesar del bloqueo económico de Estados Unidos contra Cuba -aún vigente-, se logran introducir en el país algunos equipos de cómputo, como la Elliot 803, SEA y máquinas de la IRIS. Ya en la década del 70, el país comienza a fabricar minicomputadoras CID y se adquiere por donación de la URSS en 1976, un equipo EC-1022, que entró en explotación en 1978 en la Academia de Ciencias de Cuba.

En cuanto a la formación de profesionales, el gobierno cubano preparó en la segunda mitad de la década del 60, planes emergentes de calificación y recalificación para desarrollar técnicos e ingenieros de hardware.

La especialidad de Análisis Numérico, abierta en 1963 dentro de la Licenciatura en Matemática, devino en la Licenciatura en Computación en 1970.

En el año 1984, analizando la situación socio-económica cubana, el Dr. Fidel Castro señala la imperiosa necesidad de dedicar fondos significativos para el desarrollo de la Computación. Es el año 1985, el momento en cual se realiza un extraordinario salto cuantitativo y cualitativo en el terreno de la computación, principalmente con microcomputadoras personales. Las técnicas de computación se introducen ampliamente en las diferentes carreras universitarias, en la economía y los servicios y se hacen planes para su introducción en la educación media, media superior y técnica: que ya han comenzado a aplicarse.

En la actualidad, el país egresa Licenciados en Matemática, con un perfil amplio que incluye disciplinas avanzadas de matemática general, estadística, investigaciones de operaciones y computación, en las universidades de La Habana y de Oriente. Egresa también Licenciados especializados en Computación en las Universidades de La Habana, Central y de Oriente, e ingenieros con dominio del hardware en diversos institutos superiores tecnológicos.

La formación de profesores y maestros de Matemática y/o Computación para la educación media, media-superior y técnica, está cubierta por una vasta red nacional de institutos superiores pedagógicos, sucesores de la antiguas facultades de pedagogía en las universidades. Los claustros mayoritariamente jóvenes de estos institutos, constituyen una fuerza potencial muy significativa para el futuro inmediato.

La Matemática y la Computación desbordaron los centros de estudio y los institutos de investigación, para comenzar a utilizarse ampliamente en las diversas esferas científicas, industriales, económicas, médicas, etc.

DIversos intentos dirigidos a las publicaciones científicas, se materializaron finalmente en algunas revistas estables de Matemática, de Computación y de Educación, que elevan cada vez más su nivel científico. Paralelamente, se han editado nacionalmente libros de textos y de actualidad científica y los eventos nacionales e internacionales sobre Matemática y Computación, han pasado a ser una actividad frecuente en el quehacer cotidiano del país.

La sistematicidad en los cursos de postgrado, la existencia de una Comisión Nacional de Grados Científicos y el contínuo intercambio con numerosas instituciones extrajeras, garantizan la formación postgraduada y la actualización de los especialistas.

Si los párrafos anteriores no son totalmente ilustrativos, ello se debe solamente a la imposibilidad de resumir el prodigioso vuelco ocurrido en la ciencia cubana en estos 31 años de Revolución.

Dentro de este multifacético proceso, no podía faltar la creación de sociedades científicas, desaparecidas mayoritariamente al triunfo de la Revolución con el éxodo de una parte considerable de los pocos profesionales de aquella época.

El 29 de junio de 1978, luego del trabajo de una Comisión Gestora que amparada por la Academia de Ciencias sesionó durante varios meses en el Capitolio Nacional, se creó la Sociedad Cubana de Matemática, la cual se denominó legalmente Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC) a partir de 1988, por solicitud expresa de sus miembros.

Entre los objetivos de la SCMC se encuentran:

a) Promover el desarrollo de la Matemática y la Computación en Cuba, tanto en sus aspectos teóricos como aplicados, con el propósito de coadyuvar a la revolución científico-técnica, tarea en la que está empeñada la revolución socialista cubana.

b) Propiciar una estrecha vinculación entre los matemáticos y especialistas de la computación con el propósito de viabilizar un intercambio dinámico en la actividad científica nacional, tanto en los aspectos docentes como investigativos, y de aplicación a la producción y los servicios.

c) Contribuir a resaltar la superioridad del sistema socialista mediante el logro de un nivel científico avanzado en un país en vías de desarrollo, lo cual resulta especialmente significativo en el ámbito latinoamericano.

d) Contribuir a la elevación del nivel de la educación matemática en Cuba y por tanto, incrementar en los jóvenes el interés y el reconocimiento de la importancia de su desarrollo, con el fin de coadyuvar a la consecución del número y la calidad de los matemáticos y especialistas de la computación que la revolución científica-técnica requiere.

La Sociedad Cubana de Matemática y Computación entre otras tareas o funciones, desarrolla las siguientes:

a) Promover y patrocinar la celebración de eventos científicos de carácter nacional e internacional, en especial la celebración periódica del Congreso Científico de la Sociedad.

b) Organizar sesiones científicas especializadas.

c) Mantener los medios de información necesarios entre los matemáticos.

d) Elaborar y editar la revista de la Sociedad y garantizar su publicación y difusión nacional e internacional.

e) Organizar concursos dentro de las distintas especialidades de la Matemática y la Computación y establecer y otorgar premios y menciones honoríficas para los mejores trabajos científicos presentados

f) Apoyar la realización de concursos de Matemática, Computación y de Educación Matemática, de nivel medio y superior y contribuir a la mejor preparación de los concursantes, tanto a nivel nacional como internacional.

Sería demasiado extenso y quizás innecesario, seleccionar los hechos a través de los cuales la SCMC ha materializado estos objetivos y funciones. A título de ejemplo, para ofrecer una idea más cabal, citemos los siguientes:

• Organización de los congresos nacionales de Matemática y Computación, que se celebran cada tres años y junto al encuentro científico y multidisciplinario, sirve de marco para la renovación de la Junta Directiva y para otras actividades sociales. Hasta el presente, comenzando en 1982, se han celebrado 3 congresos, 2 en Ciudad de La Habana y 1 en Santiago de Cuba. El IV Congreso tendrá lugar en Holguín, con subsede en la Tunas, del 11 al 16 de noviembre de 1991.

• Otorgamiento en los congresos del premio Pablo Miguel. Este premio, constituido en 1980, se entrega trienalmente hasta a tres personas cuyos trabajos de investigación en Matemática, Computación o en aplicaciones de la Matemática y la Computación, representen aportes significativos a la ciencia mundial o a la economía nacional. Para la entrega del Premio, consistente en diploma, medalla y efectivo en moneda nacional, se conforma un jurado de 9 personas que tienen seis meses para decidir los premiados. El premio no puede ganarse más de una vez en la vida y goza de un prestigio muy alto en el país.

En las mismas condiciones, decidido por otro tribunal de 5 personas, se otorga hasta 1 premio Pablo Miguel, a una persona cuyo trabajo investigativo contribuya significativamente a la enseñanza de la Matemática y la Computación.

Hasta el III Congreso la SCMC ha entregado 9 premios Pablo Miguel, lo cual demuestra, partiendo del alto nivel científico que ya ha alcanzado el país, lo extremadamente riguroso que han sido los Tribunales.

Otorgamientos de las distinciones de Miembro Emérito o de Socio de Honor, así como de otras distinciones, a personalidades científicas, docentes o públicas, cuya obra y prestigio los miembros de la SCMC en Asamblea general, consideren oportuno reconocer.

• Apoyo económico y/o técnico a olimpíadas y concursos nacionales e internacionales. En particular, destacado públicamente por el Ministro de Educación, el papel relevante de la SCMC en la Olimpíada Internacional de Matemática y Computación en los niveles primario, secundario y terciario, y en la elaboración de políticas científicas nacionales.

• Publicación de la Carta Informativa Trimestral, del Boletín de la SCMC de periodicidad semestral y apoyo técnico a revistas científicas de organismos nacionales.

• Celebración de varias decenas de eventos científicos de carácter regional o nacional y colaboración, con instituciones del Estado en la organización de eventos científicos regionales, nacionales e internacionales.

• Realización de diferente cursos y de cientos de conferencias científicas.

• Relación e intercambio con organizaciones científicas similares de otros países o de carácter internacionales.

La SCMC, aún en pleno desarrollo, está integrada por más de un millar de miembros, organizados a lo largo y ancho del país, en filiales provinciales.

Su prestigio, merecidamente ganado con un trabajo serio y sostenido, continúa creciendo, y se ha convertido en una organización no estatal que vinculada a las instituciones de Estado, coadyuva muy favorablemente al desarrollo científico nacional, en aras del progreso de la Sociedad Socialista de Cuba.

Conducta a largo plazo para problemas de difusión-reacción

Amado Reyes *

1. Introducción

El presente trabajo pretende caracterizar la conducta local a largo plazo de las soluciones de un problema de valor inicial y en la frontera con una ecuación semilineal del tipo de reacción-difusión. Se muestra en el trabajo cómo la conducta del sistema depende de las condiciones en la frontera y de la función f que contiene las características propias del atributo representado por la solución.

De gran interés en las aplicaciones es el problema,

1.1 $\frac{\partial u}{\partial v} = v^2 u + f(u)$, (x,t) $\Omega x \mathbb{R}^{+}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u(x,o) = U_o(x) \;,\; x \in \Omega$$

Aquí f es una función diferenciable, $U \in c^2 (\Omega \times R+) \cap c^1 (\partial\Omega)$ y $f(u) \in R$. Este es un problema de los llamados de reacción-difusión. En este caso asumimos que Ω es un conjunto abierto de R^n (pensar en n=1) y $\partial\Omega$ es la frontera de n. Se asume además, que en el caso que nos atañe, el aspecto reactivo (caracterizado por f) entra en acción después que la difusión ha empezado y que el aspecto reactivo se mantiene por mucho tiempo.

Normalmente se entiende por una solución de estado estacionario para el problema (1.1) una función ø que satisface el problema,

1.2 $V^2 ø + f(ø) = 0 \;,\; x \in \Omega$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Es bueno observar que mientras no entre en el sistema el aspecto reactivo, el estado del sistema está regido por las soluciones del problema

1.3 $\frac{\partial v}{\partial t} = V^2 v$, $(x,t) \in \Omega x\ (O,T)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$v(x,o) = v_o = u_o(x) \;,\; x \in \Omega$$

Ahora, una vez entra en juego el aspecto reactivo, el sistema estará descrito por la solucion del problema.

1.1' $\frac{\partial u}{\partial t} = V^2 u + f(u)$, $(x,t) \in \Omega x(T, \infty)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u(x,T) = u_t(x) = \lim_{T} u(x,t),\; x \in \Omega$$

---

* Director del Departamento de Matemática y Física de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

Estamos particularmente interesados en soluciones de largo plazo, es decir, funciones ϕ, tales que:

1.4 $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \phi(x),\ x\ \ \Omega$

donde u es solución del problema 1.1'. Es claro que una función ϕ tal satisface el problema 1.2 En lo adelante nos dedicaremos a estudiar el problema 1.2.

2. El problema de Estado Estacionario.

Supongamos que P es una solución de equilibrio de la ecuación 1.2, es decir, P es tal que

2.1 $f(P) = 0$

Si desarrollamos $f(\phi o)$ en su serie de Taylor alrededor de P y retenemos los términos de primer orden, tenemos

2.2 $f(\phi) \sim f'(P)\ (\phi - P)$

Esta aproximación puede considerarse buena si recordamos que buscamos soluciones $\phi(x)$ cercanas a la solución de equilibrio P. Así, que la conducta local de las soluciones de

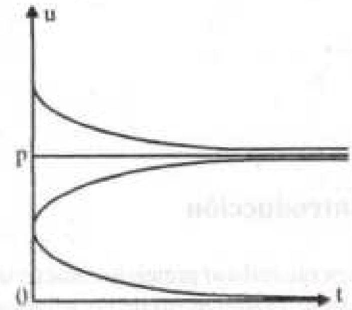
2.3 $\nabla^2\phi + f(P)\ (\phi - P) = 0\ ,\ x \in \Omega$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

es similar a la de las soluciones de 1.2.

Diremos que el problema 1.1 presenta la propiedad de hoyo negro (atractor) si la solución cero es una solución de equilibrio y si u es una solución de 1.1 y $\delta > 0$ es dado, tal que $|u| < \delta$, entonces $\lim_{t \to \infty} u \to 0$.

Lo expresado más arriba señala que si el problema 1.1 tiene la propiedad de hoyo negro, entonces las soluciones de 1.1 que pasan cerca de la solución nula terminarán absorbidas por ella.



3. El Problema de Valores Propios y Linealización

La proposición siguiente señala la relación existente entre el problema 1.2, el correspondiente problema de valores propios y el proceso de linealización alrededor de puntos de equilibrio.

Proposición 1.3

Si w es una solución de 1.2 y si ϕ satisface el problema:

3.1 $\nabla^2\phi = \lambda\phi\quad ,\quad x \in \Omega$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

entonces $\lambda w + f(w) = 0$, casi en toda parte de Ω.

Prueba

Si multiplicamos la ecuación 1.2 por una solución ϕ de 3.1 e integramos, tenemos:

$$\int_\Omega (\nabla^2 w)\phi\, dx + \int_\Omega f(w)\, \phi\, dx = 0$$

Por la identidad de Green, se tiene:

$$\int_\Omega w\nabla^2\phi\, dx + \int_{\partial\Omega}(\phi \frac{\partial\Omega}{\partial v} - w\frac{\partial\phi}{\partial v})\, ds + \int_\Omega f(w)\phi\, dx = o$$

y si tenemos en cuenta las condiciones en la frontera, se obtiene:

$$\int_\Omega w\, \nabla^2\phi\, dx + \int_\Omega f\,(w)\, \phi\, dx = 0,$$

lo cual conduce a

$$\int_\Omega(\lambda w + f(w))\, \phi\, dx = 0$$

$\lambda \delta + f\ w +\ f(w) = 0$, casi en toda parte de Ω,

Es decir, los problemas 1.2 y 3.1 son equivalentes casi en todas las partes de Ω con $\lambda w = -f(w)$, pero si no depende de w, entonces f debe ser una función lineal.

Si en la proposición ponemos w=p, se tiene $\lambda = -f'(p)$, en cuyo caso nos dice que el problema 3.1 coincide con nuestra ecuación linealizada, pudiendo escribirse como:

3.2 $\nabla^2 w_p + f'(P)\, w_p = 0 \quad , \quad x \in \Omega$

$$\left.\frac{\partial w_p}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Donde $w_p = w - p$. La única solución de 3.2 es $w_p = 0$, es decir, w=p. En el caso de $p = 0$, se tiene $w = 0$. Así que las soluciones de estado estacionario de 1.2 coinciden con las soluciones de equilibrio en el caso de condiciones en la frontera de Newmann homogéneas.

Para fijar las ideas tomemos $u\,(x,t) \in R$, $\phi\,(x) \in R$, $x \in (0,1) \subset R$, $t \in R^+$ y consideremos el caso:

3.3 $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + u - u^2 \quad , (x,t) \in (0,1) \times R^+$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u\,(x,o) = u_o\,(x) \quad , \quad x \in (0,1)$$

El problema correspondiente de estado estacionario es:

3.4 $\nabla^2\phi + \phi - \phi^2 = 0 \quad , \quad x \in (0,1)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(1) = 0$$

Las soluciones de equilibrio se obtienen haciendo

$f(u) = 0$,

siendo estas $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$.

La linealización del problema 3.4 en $u_1 = 0$ es

3.5 $\nabla^2\phi + \phi = 0 \quad , \quad x \in (0,1)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(1) = 0$$

y su solución es $\phi(x) = 0$. Observándose que la solución del problema 3.5 coincide con la la solución de equilibrio de 3.4 y esto significa que una solución de 3.3 que pasa cerca de la solución cero, terminará absorbida por ésta.

Por otra parte, la linealización de 3.4 en $u_2 = 1$ es :

3.6 $\nabla^2\phi - (\phi - 1) = 0, \quad x \in (0,1)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(1) = 0$$

cuya solución es $\phi(x) = 1$.

También en esta ocasión la solución de estado estacionario de 3.6 coincide con la solución de equilibrio de 3.4 y ésto significa que una solución de 3.3 que pasa cerca de la solución de equilibrio igual a uno, terminará absorbida por ésta.

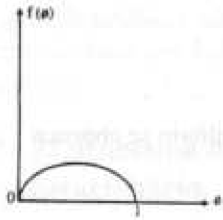


Fig.1

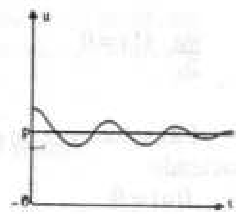


Fig. 2

4. Problemas con Condiciones en la Frontera no Homogéneas

Considere el problema:

4.1 $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f(u)$, $(x,t) \in \Omega$ x

$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = K$, K constante diferente de 0.

El problema de estado estacionario correspondiente es

4.2 $\nabla^2 w + f(w) = 0$, $x \in \Omega$

$\left.\frac{\partial w}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = K$

Sea $\varnothing$ una función que coincide con w en $\partial\Omega$ y que satisface el problema

4.3 $\nabla^2 \phi = \lambda \phi$ $x \in \Omega$

$\left.\frac{\partial \varnothing}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = K$

Si multiplicamos la ec. de 4.2 por ø e integramos sobre Ω , tenemos:

$$\int_\Omega \nabla^2 w \phi dx + \int_\Omega f(w)\phi\, dx = \int_\Omega w \nabla^2 \phi\, dx +$$
$$\int_{\partial\Omega} \left(\phi \frac{\partial w}{\partial v} - w \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds + \int_\Omega f(w)\, dx =$$
$$\int_\Omega (w + f(w))\, \phi\, dx = 0,$$

es decir:

4.4 $\lambda w + f(w) = 0$ casi en toda parte de Ω, aquí se desprende que:

4.5 $\lambda w = - f(w)$

Si λ no depende de w, se tiene:

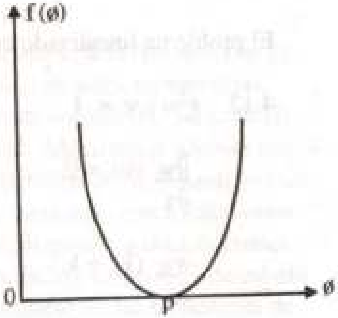
4.6 $\lambda = - f'(P)$,

donde P es una solución de equilibrio.

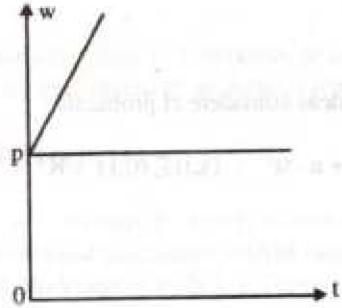
Sea P una solución de equilibrio de 4.2, entonces la linealización alrededor de P está dada por:

4.7 $\left| \begin{array}{l} \nabla^2 w_p + f'(P)\, w_p = 0 \quad , x \in \\ \left.\frac{\partial w_p}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = K \end{array} \right.$

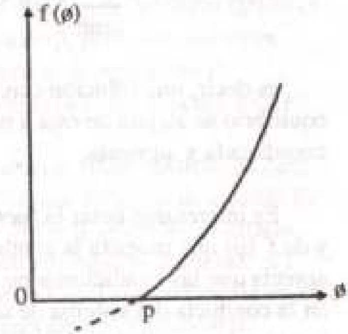
De la teoría de ecuaciones diferenciales se sabe que si $f'(p) = 0$, entonces $W_p = W - P$ es una función lineal, creciente en general; si $f'(p) > 0$, entonces w_p es una función periódica y si $f'(p) < 0$, entonces w_p es una función hiperbólica. Es interesante observar cómo en el caso del problema con flujo a través de la frontera igual a cero, la solución de estado estacionario no depende del signo de $f'(p)$ y cómo es crucial el signo de $f'(p)$ en la solución de estado estacionario para un flujo distinto de cero por la frontera.



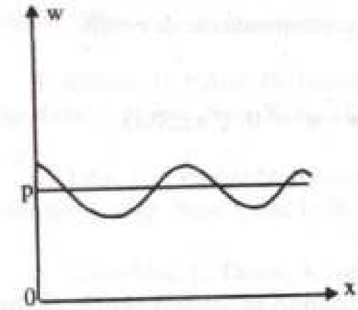
f (p) =0
Fig. 4



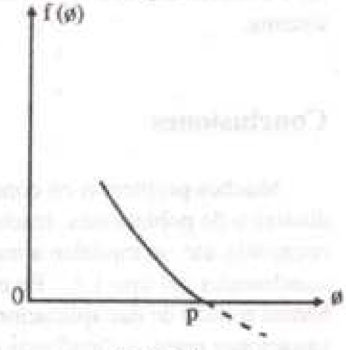
función lineal
Fig. 5



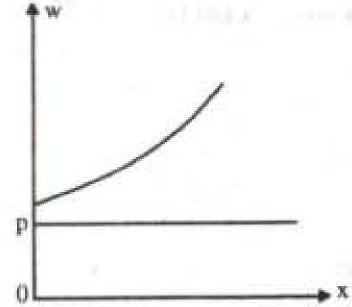
f (p)>0
Fig. 6



función periódica
Fig. 7



f (p)<0
Fig. 8



función hiperbólica
Fig. 9

Para fijar las ideas considere el problema

4.8 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + u - u^2$, $(x,t) \in (0,1) \times R^+$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0) = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(1) = k$, k constante distinta de 0.

El problema correspondiente de estado estacionario es

4.9 $\nabla^2 w + w - w^2 = 0$, $x \in (0,1)$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(1) = K$

El problema linealizado en u_1, $(f'(o) > o)$ es:

4.10 $\nabla^2 w + w = o$, $x \in (0,1)$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(1) = K$

y la solución es

$$w(x) = -\frac{k}{\cos 1} \cos x$$

es decir, la solución de 4.10 fluctuá en el espacio con un valor máximo de

$$|k / \cos 1|$$

El problema linealizado en $u_2 = 1$,$(f'(1)<0)$ es

4.12 $\nabla^2 w - w = -1$, $x \in (0,1)$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(0) = 0$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}(1) = k$

y su solución es

4.13 $w(x) = \dfrac{k}{\operatorname{senh} 1} \cosh x + 1$

es decir, una solución cercana a la solución de equilibrio se alejará de ésta a medida que la coordenada x aumenta.

Es interesante notar la fuerte dependencia de K y de f (p) que muestra la conducta del sistema. Se aprecia que las condiciones en la frontera influyen en la conducta del sistema de manera amplia y que la naturaleza de f(u) es decisiva en la conducta del sistema; esto es de esperarse, ya que f(u) contiene las características intrínsecas de los agentes del sistema.

Conclusiones

Muchos problemas en conducción de calor, dinámica de poblaciones, reactores químicos, economía, etc. se modelan a través de ecuaciones semilineales del tipo 1.1. En el presente trabajo hemos tratado de dar aplicaciones cualitativas a situaciones reales valiéndonos de conceptos muy conocidos en la literatura matemática, como son el concepto de linealización de soluciones de estado estacionario y de soluciones de equilibrio.

Hemos mostrado que si el sistema está modelado por una ecuación semilineal del tipo descrito y si las condiciones en la frontera son de Newmann homogéneas, entonces no hay otras soluciones de estado estacionario que no sean las soluciones de equilibrio. Mostramos además que si las condiciones en la frontera de Newmann son no homogéneas, entonces podemos tener soluciones de estado estacionarió diferentes a las soluciones de equilibrio; más aún dichas soluciones de estado estacionario podrían alejarse de las soluciones de equilibrio cuando el espacio aumenta. En el trabajo se observa que si un sistema es cerrado (no flujo por la frontera, barreras reflectoras), y si su solución está cerca de cero, entonces en el futuro el estado del sistema será cero; pero si la solución está cerca de una solución de equilibrio P, enconces en el futuro el estado del sistema será P.

Si un sistema es abierto (flujo distinto de cero por la frontera) y si P es una solución de equilibrio tal que $f'(p) = 0$, ó $f'(p) < 0$, entonces el estado del sistema crece cuando el espacio aumenta; si $f'(p) > 0$, entonces el estado del sistema oscila en el espacio. Una mayor variedad de situaciones pueden ocurrir si f depende de un parámetro n. Esto será objeto de un estudio por separado.

Referencias

1. Brown, P. Decay to uniform states in ecological interaction. SIAM Journal on Applied Math, Volume 38, No. 1, February, 1980.

2. Catalano, G.; Eilbeck, J. A Mathematical Model for Pattern Formation in Biological Systemas. Physica, Volume 3d, No. 3, August 1981.

3. Colton, D. Partial Differential Equations. The Randon House, New York, 1988.

4. John, F. ´Partial Differencial Equations. Springer-Verlag, New York, 1978.

5. Rosenblat, S., Davis, S. Bifurcation from Infinity. SIAM Journal on Applied Math, Volume 37 No. 1, August 1979.

Matemática y lógica

Máximo Santana *

La Matemática es un instrumento de trabajo usado frecuentemente en Ingeniería, Economía, Biología, Psicología y muchas otras disciplinas científicas y técnicas, a tal punto, que se hace indispensable en la mayoría de sus actividades. A pesar de ésto existe una diferencia de fondo entre la Matemática y las disciplinas que la usan como herramienta, mientras las ultimas están íntimamente ligadas a la realidad concreta, la Matemática es abstracta.

En toda teoría Matemática existe un número reducido de palabras que se aceptan como TERMINOS NO DEFINIDOS. La adopción de un conjunto de términos no definidos es el primer paso en la abstracción Matemática de la realidad concreta. La selección de un conjunto de términos no definidos es una tarea compleja y generalmente obedece a razones de sencillez. A primera vista luce mas sensato dar una definición de todos los términos que emplearemos, pero un sencillo análisis nos permite constatar que ésto es imposible. Al definir un término nuevo, hacemos uso de otros términos previamente definidos, pero no podemos hacer ésto siempre. La primera definición no puede hacerse de esta forma, porque no existen términos definidos con anterioridad, por esta razón, los términos más sencillos y fundamentales se emplean sin definir. En la Geometría Euclidiana los términos no definidos son "punto", "recta" y "plano".

Luego se selecciona un conjunto finito de enunciados acerca de los términos no definidos, que se aceptan como verdaderos sin demostración. Estos enunciados son llamados AXIOMAS O POSTULADOS. La razón de esta selección es la misma del caso anterior. En términos generales, la demostración de un enunciado se hace señalando que se deduce lógicamente de otros previamente demostrados. Los primeros enunciados no se pueden demostrar, porque no existen enunciados previamente demostrados, y se aceptan sin demostración.

En principio la elección de los axiomas es completamente libre (al igual que la elección de los términos no definidos), sin embargo, la selección de un conjunto de axiomas que conduzcan a una teoría útil requiere de gran genialidad y profundos conocimientos.

En general, los axiomas se elaboran como modelos de la realidad. Observamos el mundo real y construimos un modelo abstracto, donde los términos no definidos corresponden a los objetos constitutivos más importantes y los axiomas describen las propiedades fundamentales de estos objetos.

En muchos textos de Matemática, actualmente en uso en nuestra escuela secundaria, se define un axioma como "una verdad tan sencilla y evidente

* Profesor del área de Matemática de la Universidad Iberoamericana.

que no necesita demostración", sin embargo, los axiomas pueden ser enunciados cualesquiera, evidentes o no. En términos estrictos la evidencia o no de un enunciado es relativa a la formación y experiencia de quien lo considere. Por otro lado, no es que no necesiten demostración, sencillamente, no podemos demostrarlos; porque no existen enunciados previamente demostrados de los cuales podamos deducirlos lógicamente.

A partir de los axiomas, cuya veracidad asumimos, demostramos la veracidad o falsedad de otros enunciados siguiendo determinadas reglas llamadas LEYES DE LA LOGICA. A su vez, los enunciados demostrados de esta forma pueden ser usados en otras demostraciones. Un enunciado cuya veracidad se ha deducido lógicamente a partir de axiomas o de enunciados previamente demostrados se llama TEOREMA.

La formulación y demostración de nuevos teoremas requiere de una profunda intuición y una sólida formación matemática. El esfuerzo creativo involucrado es similar al requerido en otros campos del conocimiento humano.

La demostración lógica es un aspecto fundamental de la MATEMÁTICA. El pensamiento lógico no es tan común ni tan fácil como usualmente se supone. Muchas personas se consideran capaces de pensar lógicamente de manera intuitiva y sin mayores esfuerzos o estudio, sin embargo, los matemáticos saben por experiencia, el esfuerzo que dicha tarea requiere. Debemos reconocer que la intuición es indispensable en el trabajo científico. El matemático la emplea para conjeturar resultados, pero sólo después de probar lógicamente sus conjeturas, se atreverá a hacer afirmaciones sobre ellas.

El problema fundamental de la lógica es determinar la veracidad de nuevos enunciados a partir de un grupo de enunciados aceptados como verdaderos (axiomas) o de enunciados previamente demostrados. De esta forma, la lógica nos ayuda a probar la veracidad de nuestra conjeturas, pero ciertamente no nos ayuda a hacerlas, para ello se requiere algo más, se requiere de la intuición y el ingenio del pensamiento creativo.

Sean A y B don enunciados. Si el hecho de que A sea verdadero trae como consecuncia que B sea verdadero, decimos que B se INFIERE de A, o bien, que B es una CONSECUENCIA LOGICA de A. El enunciado A se llama PREMISA o HIPOTESIS, y el enunciado B se llama CONCLUSION. Otra forma de expresar que B se infiere de A es: A IMPLICA B. La mayoría de los enunciados matemáticos tienen esta estructura.

Ejemplo 1:

HIPOTESIS: a) todos los estudiantes son académicos;
b) todos los académicos son caballerosos;

CONCLUSION: c) todos los estudiantes son caballerosos.

Si la conclusión de un argumento se sigue de la hipótesis, como en el ejemplo anterior, el argumento es VALIDO, en caso contrario es una FALACIA. EL proceso de obtener conclusiones válidas a partir de hipótesis dadas se llama DEDUCCION o RAZONAMIENTO DEDUCTIVO.

El hecho de que un enunciado B se deduzca del enunciado A no nos dice nada sobre la veracidad de A ni de B, sencillamente nos dice, que si A es verdadero, entonces B también lo es, o sea, que la veracidad de A es SUFICIENTE para asegurar la veracidad de B.

Ejemplo 2:

HIPOTESIS: a) si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son iguales;

b) m y n son dos ángulos opuestos por el vértice;

CONCLUSION: c) m y n son iguales.

Como sabemos que ciertamente "si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son iguales, es suficiente asegurar que dos ángulos son opuestos por el vértice para que sean iguales. Por otro lado, la veracidad de B no garantiza la veracidad de A; siguiendo con el ejemplo anterior, el que dos ángulos sean iguales no garantiza que sean opuestos por el vértice, pero A será verdadero SOLO SI B lo es: dos ángulos serán opuestos por el vértice solo si son iguales. Luego, la veracidad de B es NECESARIA para asegurar la veracidad de A. Resumiendo: decir que "B se deduce de A" es equivalente a decir que "la veracidad de A es suficiente para asegurar la veracidad de B" o que "la veracidad de B es necesaria para asegurar la veracidad de A".

En un razonamiento válido, una hipótesis verdadera debe conducir a una conclusión verdadera. Si la hipótesis es verdadera y la conclusión no lo es, entonces el argumento no es valido. Por tanto, si la conclusión de un argumento valido es falsa, la hipótesis debe ser falsa. ¿Como sería la conclusión de un argumento válido si la hipótesis es falsa?

Como se desprende fácilmente del párrafo anterior, la validez de un argumento depende de la veracidad de sus enunciados. La validez depende solamente de la forma del argumento.

Ejemplo 3:

HIPOTESIS: a) todos los x son y;
b) todos los y son z;

CONCLUSION: c) todos los x son z;

La forma de este argumento lo hace válido independientemente de los objetos que sustituyan a las letras x, y, z. Un símbolo como x, y o z, que puede tener varios significados se llama VARIABLE. El conjunto de objetos por los que puede ser sustituida una variable es el DOMINIO DE DEFINICION DE LA VARIABLE.

Si B se deduce de A, y a su vez A se deduce de B, decimos que los enunciados A y B son EQUIVALENTES. Si B se deduce de A, esto puede expresarse como: "B si A". Si A se deduce de B, esto puede expresarse como: "B sólo si A". Luego si B se deduce de A y A se deduce de B, podemos expresar esto como: "B si y sólo si A", o "A es una condicione NECESARIA Y SUFICIENTE PARA B".

A diario nos encontramos con argumentos que no son válidos; ésto puede ser fácilmente detectado sustituyendo los enunciados del argumento por variables, para así poder analizar su estructura lógica y determinar su validez.

El primer modelo escrito que se conoce de pensamiento deductivo es la obra de Euclides: Los elementos, cuyo aporte principal no es el contenido, de por sí muy importante, sino haber mostrado por primera vez que todos los teoremas conocidos son consecuencias lógicas de unos cuantos supuestos. De esta forma, en lugar de cuestionar la veracidad de infinidad de teoremas, esta veracidad de hace depender de la veracidad de unos pocos supuestos. Por otro lado, este enfoque permite deducir muchos nuevos teoremas a partir de los ya existentes.

A resumen de cuentas, una CIENCIA MATEMATICA ABSTRACTA es una colección de enunciados que comienza con unos pocos enunciados admitidos sin demostración (axiomas), que se refieren a ciertos términos no definidos. Todos los otros enunciados se deducen lógicamente de los axiomas y todos los otros términos se definen a partir de los términos no definidos. Esta forma de razonar se llama PENSAMIENTO AXIOMATICO.

¿Cómo podemos razonar sobre términos no definidos? ¿Que sabemos de ellos? Sabemos de ellos lo que hemos supuesto en nuestros enunciados no demostrados o axiomas.

De una Ciencia Matemática abstracta no puede afirmarse que sus conclusiones son verdaderas; sólo puede afirmarse que son válidas, es decir, que sus teoremas se deducen lógicamente de sus axiomas o postulados. Si es posible hallar INTERPRETACIONES CONCRETAS para los términos no definidos, entonces todos los teoremas se convierten automáticamente en verdaderos respecto a estas interpretaciones. Por ejemplo, en el caso de la Geometría Euclidiana, si podemos hallar en el mundo real objetos que tengan las propiedades asignadas por los postulados a los términos no definidos "punto", "recta" y "plano", entonces todos los teoremas son enunciados verdaderos acerca de estos objetos. Una Ciencia Matemática abstracta sigue siendo válida aunque no se encuentre interpretaciones concretas de ella.

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

UNIBE

Santo Domingo, República Dominicana